北京大学数学丛书

模形式与迹公式

叶扬波 著



北京大学出版社

北京大学数学丛书

责任编辑：刘　勇



ISBN 7-301-04586-7/O · 0473
定价：15.00元

北 京 大 学 数 学 丛 书

模形式与迹公式

叶扬波 著



北京大学出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

模形式与迹公式/叶扬波著. 一北京: 北京大学出版社,2001.9
(北京大学数学丛书)
ISBN 7-301-04586-7

Ⅰ.模… Ⅱ.叶… Ⅲ.①模形式-研究 ②迹-公式-研究
Ⅵ.0156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 041345 号

书　　名:模形式与迹公式
著作责任者:叶扬波　著
责任编辑:刘　勇
标准书号:ISBN 7-301-04586-7/O·0473
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　邮购部 62752019
电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排　印　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850×1168　32 开本　8.375 印张　200 千字
2001 年 9 月第 1 版　2001 年 9 月第 1 次印刷
印　　数:0001—4000 册
定　　价:15.00 元

《北京大学数学丛书》书目

1	同伦论基础	廖山涛等著
2	抽样论	许宝騄著
3.	微分几何讲义(第二版)	陈省身等著
4	H_p 鞅论	龙瑞麟著
5	代数曲线	[美]P·格列菲斯著
6.	代数学(上、下)	莫宗坚等著
7	黎曼几何初步	伍鸿熙等著
8	二阶矩阵群的表示与自守形式	黎景辉等著
9	微分动力系统导引	张锦炎等著
10	无限元方法	应隆安著
11	李群讲义	项武义等著
12	H^p 空间论	邓东皋等著
13	黎曼几何选讲	伍鸿熙等著
14	矩阵计算的理论与方法	徐树方编著
15.	位势论	张鸣镛著
16	数论及其应用	李文卿著
17	模形式与迹公式	叶扬波著

说　　明

此丛书是以数学、计算数学、概率统计及有关专业的高年级学生、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物 丛书特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就，叙述精练，约相当于一学期周学时为 3 的研究生课程的取材 我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，为提高本科生的教学质量贡献一份力量

我们诚恳地希望. 广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

内容简介

模形式理论是现代数学的一个重要分支,它在函数论、李群表示论、数论、几何、通讯等分支中都有广泛的应用 模形式可分为解析的与非解析的两大类,解析模形式起源于 20 世纪 20 年代,目前已臻完善,非解析模形式(又称波动形式)则是较晚发展起来的,它在现代物理学中有更重要的应用 这两类模形式在许多方面有类似之处但非解析的情形有其特殊的困难之处.

本书从上半平面上的非解析模形式着手,对迹公式的理论与方法进行了系统地介绍,特别是对模形式的国内外研究概貌及研究成果,其中包括作者大量的研究成果给予了详实的讲述. 全书共分七章,内容包括· Maass 波动形式、Selberg 迹公式、GL(2)群上的迹公式、Kuznetsov 迹公式、相对迹公式(几何部分)、相对迹公式(谱分解部分)等,并在附录中介绍了 p 进数域 为了尽可能从相对初等的角度来引导读者进入这个领域,从而对数论中的模形式与群表示理论有所了解,本书重点讨论了模形式与迹公式的最简单的情况

本书可以作为高等学校数学专业研究生教材,也可供高等学校数学专业高年级学生、青年教师,以及数学工作者参考

本书承蒙王元教授封面题写书名,特此致谢。

叶扬波
2001 年 7 月于北京

作者简介

本书作者现为美国依阿华大学数学系教授,于 1981 年在清华大学应用数学系本科毕业,后在美国哥伦比亚大学取得硕士与博士学位。叶扬波教授曾任美国高等研究院成员,约翰·霍普金斯大学及康奈尔大学助理教授。

自　序

以分析方法研究、解决数论问题已有数百年的历史，并形成了解析数论这一数论的重要分支. 但是以分析方法研究数论并不局限于古典解析数论，例如本书第一章所要介绍的非解析模形式理论，就需要利用泛函分析的工具来得到非欧 Laplace 算子的谱分解. 更进一步，通过对上半平面中的不变微分算子与不变积分算子的研究，Selberg 提出了 Selberg 迹公式的理论与结论. 利用这个 Selberg 迹公式可以推出非欧 Laplace 算子特征值的分布估计，同时也可看出非欧Laplace算子特征值的分布与素数分布的类似性.

Selberg 并没有给出他的迹公式的证明，因此在此后若干年时间许多数学家都在试图以不同的方法补出 Selberg 迹公式的证明，这大大地促进了迹公式理论的发展. 本书在这方面着重介绍了群 GL(2)上的迹公式，而这个迹公式在可简约代数群上的推广及其与扭曲迹公式的比较，是当今迹公式理论中很活跃的一个课题，其重要性是这个迹公式可以用来研究并可能最终证明 Langlands 的群表示函子性猜想.

对积分算子的核函数计算双重 Fourier 系数可以得到 Kuznetsov 迹公式，这里所谓的计算是指对核函数的积分的几何部分进行计算然后对其谱分解部分再进行计算. 通过对核函数中的函数进行特殊的选取，或取某种类型的极限，我们可把几何部分表示成 Kloosterman 和的一个加权平均. 此时对迹公式的谱分解部分进行估值，就可得到 Kuznetsov 对 Kloosterman 和$K(m,n,c)$的加权和的估计

$$\sum_{1\leqslant c\leqslant x}\frac{K(m,n,c)}{c}=O(x^{1/6}\log^{1/3}x).$$

如果上式右端的估计可以改进为 $O(x^{\varepsilon})$，则就是 Linnik 猜想了.

受到群上迹公式与 Kuznetsov 迹公式的启发，Jacquet 等人指出了相对迹公式的概念. 这里的相对迹公式实际上是两个迹公式之间的一个等式，其一端往往是 Kuznetsov 迹公式或其推广，另一端则是对积分算子的核函数进行新的一类积分，而这两端的核函数是在不同群上的积分算子的核函数. 这样的相对迹公式可以用来研究不同群上的 Langlands 函子性猜想.

在相对迹公式的证明过程中，往往会出现 Kloosterman 和或其推广与另外一种新的指数和之间的恒等式. 可以看出这些指数和恒等式与 Langlands 函子性有密切的关系，而这种关系可能就是群表示的函子性在数论尤其是解析数论中的表现形式.

以上这些都是以分析的方法研究数论的例子，由此我们可以认为当代的解析数论的研究领域比古典解析数论要宽广得多. 将这些新的研究领域介绍给读者，尤其是对解析数论有兴趣、有研究的读者，是本书创意时的一大目的. 由于作者水平有限，这个目的是否能有效的达到，行文中是否有不完善的地方，还请专家指正.

1996 年春在北京大学与 1997 年春在山东大学分别举办了近代数论研讨班，我在研讨班上讲了模形式与迹公式，本书就是在当时的讲稿上发展而成. 本书的附录是我 1999 年在香港大学李群研讨班上的讲稿. 在此我对北京大学、山东大学与香港大学对我的热情支持与接待表示感谢.

北京大学数学学院赵春来教授仔细审阅了全部书稿，并对书稿中多处内容提出了许多很好的修改意见；北京大学出版社刘勇先生对本书细核原文，标立目次. 他们两位对本书的出版倾注了大量的心血，付出了辛勤的劳动，其严谨认真的态度，使我大为感动. 在此向他们表示衷心的感谢，“重劳心力，尤所感愧”.

最后对我的妻子钱放为本书的写作所给予的支持与理解表示感谢.

叶扬波

2001 年 1 月于依阿华大学

目　　录

第一章 Maass 波动形式

§1 引 言

提起模形式的理论大家首先想到的是解析模形式,即作为 z 的一个函数,其定义在上半平面 $\mathfrak{H}=\{z\in \boldsymbol{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ 上,在 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 或其某一个算术子群的作用下不变或满足某种“模”的性质,并且在 $\mathfrak{H}$ 上包括无穷远点处都全纯. 对于解析模形式的参考书籍可见参考文献[21],[91]. 在本章之中,我们不考虑这种解析模形式 我们要讨论的是 20 世纪 40 年代末由 Maass[1]所引进的非解析模形式理论 在以后的几章中我们再进一步介绍 Selberg[22]在 Maass 工作的基础上所建立的迹公式,Kuznetsov 的公式以及近年来发展起来的相对迹公式. 通过这几章的讨论,读者可以看出非解析模形式对于各种不同类型的迹公式发展中所起的基础性的作用,并对模形式理论近代的发展及其在数论中的应用有一个总体的概念.

非解析模形式又常被叫做 **Maass 波动形式**,我们或简称其为 Maass 形式. 这里“波动”二字来源于非解析模形式 $f(z)$ 作为上半平面 $\mathfrak{H}$ 上的函数,是非欧 Laplace 算子的一个特征函数. 在欧氏几何中这对应于振动膜的特征值问题. $f(z)$ 对于 $z\in\mathfrak{H}$ 来说不是一个解析函数,而仅仅是 z 的实部与虚部的实解析函数. $f(z)$ 所满足的另一个重要条件是其在 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 的一个算术子群 Γ 的作用下不变,或更一般的,其在 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ 的某一个不连续子群 Γ 的作用下不变. 在后一种情况下,我们主要考虑 Γ 为第一类 Fuchs 群的情况,这时,根据定义,$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 有有限面积.

对于 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 来说有两种情况: 一是 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 为紧致,则其相当于一

第一章 Maass 波动形式

§1 引 言

提起模形式的理论大家首先想到的是解析模形式，即作为 z 的一个函数，其定义在上半平面 $\mathfrak{H}=\{z\in \boldsymbol{C}\mid \operatorname{Im}(z)>0\}$ 上，在 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$或其某一个算术子群的作用下不变或满足某种"模"的性质，并且在 $\mathfrak{H}$ 上包括无穷远点处都全纯. 对于解析模形式的参考书籍可见参考文献[21]，[91]. 在本章之中，我们不考虑这种解析模形式. 我们要讨论的是 20 世纪 40 年代末由 Maass[1]所引进的非解析模形式理论. 在以后的几章中我们再进一步介绍 Selberg[22]在 Maass 工作的基础上所建立的迹公式，Kuznetsov 的公式以及近年来发展起来的相对迹公式. 通过这几章的讨论，读者可以看出非解析模形式对于各种不同类型的迹公式发展中所起的基础性的作用，并对模形式理论近代的发展及其在数论中的应用有一个总体的概念.

非解析模形式又常被叫做 **Maass 波动形式**，我们或简称其为 Maass 形式. 这里"波动"二字来源于非解析模形式 $f(z)$作为上半平面 $\mathfrak{H}$ 上的函数，是非欧 Laplace 算子的一个特征函数. 在欧氏几何中这对应于振动膜的特征值问题. $f(z)$对于 $z\in\mathfrak{H}$ 来说不是一个解析函数，而仅仅是 z 的实部与虚部的实解析函数. $f(z)$所满足的另一个重要条件是其在 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$的一个算术子群 Γ 的作用下不变，或更一般的，其在 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$的某一个不连续子群 Γ 的作用下不变. 在后一种情况下，我们主要考虑 Γ 为第一类 Fuchs 群的情况，这时，根据定义，$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 有有限面积.

对于 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 来说有两种情况：一是 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 为紧致，则其相当于一

个紧致 Riemann 曲面，其上的模形式理论，也就是说其上的 Laplace 算子特征函数理论，与微分几何有着密切的联系. 若要回到数论上，则我们可取一个四元数代数的单位子群作为不连续群 Γ，有关的工作可参阅参考文献[23]或[24].

另一种情况是 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 非紧致，我们说 Γ 有尖点. 最简单的例子就是 $\Gamma=SL(2,\mathbf{Z})$，其基本区域非紧致，有一尖点∞. 其他的例子包括下面的几种算术子群：

主同余子群

$$\Gamma(n)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbf{Z})\,\middle|\,\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\mathrm{mod}\ n)\right\};$$

Hecke 同余子群

$$\Gamma_0(n)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbf{Z})\,\middle|\,c\equiv 0(\mathrm{mod}\ n)\right\};$$

同余子群，定义为：$SL(2,\mathbf{Z})$的任意一个子群，其包含某一个 $\Gamma(n)$.

关于非解析模形式与 Selberg 迹公式的著作浩如烟海，本书不准备作简单的重复. 例如参考文献[88]与[90]都是非常好的著作. 但另一方面，现行的文献大都力求完美，尽量包容了 Γ 的各种情况，至少也都考虑了 $SL(2,\mathbf{Z})$的同余子群的情况，其结果固然很好，但一个副作用却是内容深奥，初次阅读者不易把握主要思路. 本章所采取的方针是主要只考虑 $\Gamma=SL(2,\mathbf{Z})$的最简单的情况，力求在这个情况下以最短的篇幅把非解析模形式理论的主要思路与证明介绍清楚，同时点出对于其他一般的不连续子群 Γ 推广的难点所在，并指出有关参考书籍与论文，使有兴趣的读者可以作进一步的探讨. 非解析模形式理论中有许多没有完成的工作，亦有许多结果尚待改进. 本章对此亦尽可能指出，为有意从事这方面研究的读者提供一个出发点.

读者在本章中可以看到，非解析模形式理论要用到 Hilbert 空间谱分解的理论. 在以后章节中泛函分析的工具对于迹公式的

建立亦起着根本的作用. 从第四章起, Kloosterman 和在迹公式的发展中起了一个核心的作用. 这些都能说明 Maass 波动形式的理论与迹公式理论都是解析数论范畴里面的分支.

§ 2　Maass 波动形式

在复平面 $\boldsymbol{C}$ 上的 Laplace 算子为

$$\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

在上半平面 $\mathfrak{H}$ 上的非欧 Laplace 算子则为

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

这个非欧 Laplace 算子在群 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ 的作用下不变, 即

$$\Delta\left(f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right) = (\Delta f)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right).$$

若要对此进行验证, 我们只要证明上式对 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})/\{\pm I\}$ 的生成元 $\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 成立即可:

$$\Delta(f(z+b)) = (\Delta f)(z+b),$$

$$\Delta\left(f\left(-\frac{1}{z}\right)\right) = (\Delta f)\left(-\frac{1}{z}\right).$$

以下, 像通常一样, 对 $g = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{R})$ 及 $z \in \mathfrak{H}$, 记

$$gz = \frac{az+b}{cz+d}.$$

定义 1　在上半平面 $\mathfrak{H}$ 上定义的一个非零实解析函数 $f(z)$ 被称为群 $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 或 $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})/\{\pm I\}$ 的一个 **Maass 波动形式**, 如果下列条件成立:

(1) 对所有的 $g \in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 成立 $f(gz) = f(z)$;

(2) $f(z)$ 是非欧 Laplace 算子的一个特征函数

$$\Delta f = \lambda f,$$

这里 λ 是 Δ 的一个特征值；

(3) 对于某一个正整数 N，

$$f(z)=O(y^N)$$

当 $y\to+\infty$ 时成立.

如果我们仅考虑在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中的 **Maass 波动形式**，则

(4) $f(z)$ 又应满足

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}|f(z)|^2\mathrm{d}z<+\infty,$$

其中 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y/y^2$ 是 $\mathfrak{H}$ 上的一个在 Γ 作用下不变的测度. 在这积分中我们可以用群 Γ 的基本区域 D 来代替 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$，以下我们取

$$D=\left\{z=x+\mathrm{i}y\,\middle|\,y>0,|z|>1,-\frac{1}{2}\leqslant\mathrm{Re}\,z<\frac{1}{2}\right\}$$

$$\cup\left\{z=x+\mathrm{i}y\,\middle|\,|z|=1,-\frac{1}{2}\leqslant\mathrm{Re}\,z\leqslant 0\right\}.$$

定义 2 一个 Maass 波动形式 $f(z)$ 被称为一个 **Maass 尖点形式**，如果

$$\int_0^1 f\left(\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}z\right)\mathrm{d}b=\int_0^1 f(z+b)\mathrm{d}b=0$$

对所有 z 都成立.

以上的定义自然可以推广到 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 的其他算术子群上去.

作为 Maass 波动形式的一个例子，我们来看一下非解析 Eisenstein 级数，其定义由下式给出

$$E^*(z,s)=\frac{\pi^{-s}}{2}\Gamma(s)\sum_{\substack{m,n\in\mathbf{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}}\frac{y^s}{|mz+n|^{2s}},$$

这里 $z=x+\mathrm{i}y$ 仍是上半平面 $\mathfrak{H}$ 上的点，右边的级数在半平面 $\mathrm{Re}\,s>1$ 中绝对收敛. 故 $E^*(z,s)$ 是 s 在半平面 $\mathrm{Re}\,s>1$ 中的一个解析函数，但不是 z 的解析函数，而仅仅是 z 的实解析函数. 可以看出以上这个 Eisenstein 级数又可以写成

$$E(z,s)=y^s+\frac{1}{2}\sum_{\substack{(c,d)=1\\c\neq 0}}\frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}$$

乘上 s 的一个函数

$$\xi(s) = \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s).$$

以下我们称 $E(z,s)$ 为 Eisenstein 级数，而称 $E^*(z,s)$ 为修正 Eisenstein 级数，或亦简称其为 Eisenstein 级数. 由于 $y/|cz+d|^2$ 即为 $\mathrm{Im}(gz)$，其中 $g=\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$，我们得到

$$E(z,s) = \frac{1}{2}\sum_{g\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}(\mathrm{Im}(gz))^s,$$

其中 Γ_∞是 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$中由$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$生成的子群. 从非解析 Eisenstein 级数的这个新的表达式可以看出 $E(z,s)$（以及 $E^*(z,s)$）在群 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$的作用下不变.

要证明当 $\mathrm{Re}\ s>1$ 时 $E(z,s)$是非欧 Laplace 算子的特征函数，我们对 Eisenstein 级数的每一项进行验证. 首先

$$\Delta y^s = s(1-s)y^s,$$

故 y^s 是一特征函数. 由于 Δ 在群 Γ 作用下不变，故

$$(\mathrm{Im}\ gz)^s = \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}$$

也是 Δ 的一个特征函数，特征值仍为 $s(1-s)$，其中 $g=\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$. 因此

$$\Delta E^*(z,s) = s(1-s)E^*(z,s).$$

如果要考虑 $E^*(z,s)$在半平面 $\mathrm{Re}\ s>1$ 以外的性质，我们需要将 $E^*(z,s)$解析延拓到整个 s 平面上. 这个解析延拓要用到非解析 Eisenstein 级数的函数方程. 这些工作我们将在下面介绍了 Maass 形式的 Fourier 展开后进行. 注意我们已经对 $E^*(z,s)$在半平面 $\mathrm{Re}\ s>1$ 上验证了定义 1 的(1)，(2)两个条件. 最后一个条件(3)也要等我们得到了 $E^*(z,s)$的解析延拓与函数方程后才能进行验证.

§3 波动形式的 Fourier 级数

设 $f(z)$是任意一个 Maass 波动形式. 由于 $f(z)$在$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$的作用下不变,我们得出 $f(z+1)=f(z)$对所有 $z\in\mathfrak{H}$ 成立. 从这个周期性质我们导出 $f(z)$有一个 Fourier 展开

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n(y)\mathrm{e}^{2\pi inx}.$$

我们以下要确定这些 Fourier 系数 $c_n(y)$.

由于 $f(z)$是非欧 Laplace 算子的特征函数,

$$\Delta f=-y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\lambda f,$$

我们可在上式两端乘以 $\mathrm{e}^{-2\pi inx}$然后从 0 到 1 对 x 积分,从而得到

$$-y^2c_n''+4\pi^2n^2y^2c_n=\lambda c_n.$$

在 n 不等于 0 时,这个常微分方程是一个变形了的 Bessel 方程,其通解为

$$c_n(y)=a_n\sqrt{y}K_{i\nu}(2\pi|n|y)+b_n\sqrt{y}I_{i\nu}(2\pi|n|y),$$

其中 $\nu=\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}$,$K_{i\nu}$是修正第三类 Bessel 函数,$I_{i\nu}$是修正第一类 Bessel 函数(参阅参考文献[2]). 注意这里 $K_{i\nu}$当 y 趋于∞时是一速降函数,而 $I_{i\nu}$是一按指数增长函数. 故从 Maass 波动形式定义中的条件(3)我们知道 b_n 必须都为零($n\neq 0$). 在 $n=0$ 时,以上 Bessel 方程的解变成 $c_0(y)=y^{\frac{1}{2}+i\nu}$,其中 $\nu=\pm\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}$. 如果 $\lambda\geqslant\frac{1}{4}$,则不可能存在

$$\int_1^\infty|c_0(y)|^2\frac{\mathrm{d}y}{y^2}<\infty.$$

故当 $\lambda\geqslant\frac{1}{4}$时,在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中 Maass 波动形式有以下 Fourier 级数

展开

$$f(z)=\sum_{n\neq 0}c_n\sqrt{y}K_\nu(2\pi|n|y)e^{2\pi inx},$$

其中 $\nu=\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}$. 从 §2 定义 2 可知此时 $\left(\lambda\geqslant\frac{1}{4}\right)$ $f(z)$ 为尖点形式. 又当 $f(z)$ 为尖点形式时, $c_0(y)$ 自然等于零, 故我们仍然得到上面的 Fourier 展开.

§4 非欧 Laplace 算子的谱分解——泛函分析

我们要考虑在 Hilbert 空间 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中非欧 Laplace 算子的谱分解问题, 这个谱分解是模形式理论在数论中应用的一个重要基石. 注意 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 是 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 也就是 Γ 的基本域 D 上平方可积的可测函数所构成的空间, 由于这个空间里并非所有函数都可以微分, Laplace 算子在其上作用的确切意义需要进一步说明.

记 $C^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 为上半平面 $\mathfrak{H}$ 上、在群 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 作用下不变的无穷可微函数构成的空间, 则 $C^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 是 Hilbert 空间 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 的一个稠密子空间. 在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的 Laplace 算子 Δ 将被理解为从 $C^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 到 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的一个线性变换. 这样定义的任意一个算子 T 可被叫做 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上**稠密定义的线性算子**. 这个算子被称为**非有界的**, 如果当 $C^\infty(\Gamma/\mathfrak{H})\cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 取 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 子空间拓扑时该算子不连续. 这个算子被称为一个**闭算子**, 如果集合 $\{(f,Tf)\mid f\in C^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\}$ 是 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\times L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 的一个闭子空间. 这个算子被称为**对称**算子, 如果 $(Tf,g)=(f,Tg)$ 对 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中所有无穷次可微函数成立. 这里, 像通常一样, $(\ ,\ )$ 表示 Hilbert 空间 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的内积.

设 T 为一个 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上稠密定义的线性算子. 记 V 为一个由所有满足下列条件的 $g\in L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 构成的一个子空间: $f\mapsto(Tf,g)$ 是一个 $C^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的线性有界泛函. 对于 $g\in V$, 线

性有界泛函 $f \mapsto (Tf,g)$ 可以延拓到全空间 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上. 根据 Riesz 线性连续泛函的表示定理,我们可在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中惟一地找到一个元素 h,使得这个线性连续泛函可由 $f \mapsto (f,h)$ 给出. 映射 $g \mapsto h$ 定义了一个从稠密子空间 V 到 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 的一个线性算子,我们将其记作 T^* 并称其为稠密定义的线性算子 T 的**共轭算子**.

稠密定义的线性算子 T 被称为**自共轭的**,如果 $T=T^*$. 这里要注意自共轭算子与对称算子的区别. 一个自共轭算子一定是对称算子,并且是一个闭算子,但一个对称算子不一定是自共轭的. 有关的详细论证可参阅有关泛函分析的书籍.

$L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的非欧 Laplace 算子 Δ 是一个稠密定义的非有界自共轭算子,其证明我们这里不引述,读者可见参考文献[8]或者[6]. 作为一个自共轭算子,Δ 在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上有谱分解,而这正是模形式理论中的重要一点. 如果一个算子仅仅是对称的,则我们不能推出其具备谱分解,但是我们至少可以得到以下的结论: 如果 f 是一个对称算子 T 的特征函数,其所对应的特征值必为实数. 事实上从 $Tf=\lambda f$ 可知 $\lambda(f,f)=(Tf,f)=(f,Tf)=\bar{\lambda}(f,f)$. 由于对于 f 有 $(f,f)\neq 0$ 我们推出 $\lambda=\bar{\lambda}$ 为一实数. 下面我们要证明非欧 Laplace 算子是一个在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上对称的且正定的算子. 由这个结论出发,我们从而可以确定非欧 Laplace 算子在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的特征值都是非负的实数,这是我们以后进行谱分解分析所需要用到的.

定理 1 非欧 Laplace 算子在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上是对称的且正定的.

证明 我们先证对称性,所用方法可见参考文献[6]. 设 $f,g \in C_c^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 为任意两个光滑、平方可积并在 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上有紧支集的函数. 这里函数在 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上有紧支集意味着函数在尖点的一个邻域为零. 由于 $C_c^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 也是 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中一个稠密子空间,我们只要对这个子空间证明我们的结论.

首先根据 Green 公式,我们有

$$\int_{\Omega}(\bar{g}\Delta^e f - f\Delta^e \bar{g})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\partial\Omega}\left(\bar{g}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\right) - f\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}\mathrm{d}x\right)\right),$$

这里 Ω 是 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 的基本域 D 除掉尖点 ∞ 的一个邻域而得到的区域，使得函数 f 与 g 的支集都包含在 Ω 中. 由于 f 与 g 在 D 中 Ω 外等于零. 我们可将上式左右两边的积分分别取在 D 与 ∂D 上. 基本域的边界 ∂D 可分解为两个垂直半直线与两段单位圆弧，而函数 f 与 g 均在两个垂直半直线上取同样的值，也在两段单位圆弧上取同样的值. 由此可推出上式右端的积分等于零，因此

$$\int_D f\Delta^e \bar{g}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D \bar{g}\Delta^e f\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 $\Delta=-y^2\Delta^e$，$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y/y^2$，我们得出 $(\Delta f,g)=(f,\Delta g)$.

为证 Δ 在 $C_c^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上是正定的，我们考虑 $(\Delta f,f)$. 根据 Green 公式我们得到

$$\int_{\partial\Omega}\bar{f}\,\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y - \bar{f}\,\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x = \int_{\Omega}\left(\bar{f}\,\Delta^e f + \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如上所述我们可将两边积分分别取于 ∂D 与 D 上，并可推出等式左边积分为零. 因此

$$-\int_D \bar{f}\,\Delta^e f\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里左边等于 $(\Delta f,f)$，而右边为一非负实数. 又因为函数 $f\in C_c^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$，右边积分等于零当且仅当 f 恒为零. 故在 $C_c^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上非欧 Laplace 算子 Δ 为正定算子.

§5　不完全 θ 级数

在这一节里，我们要对 Laplace 算子在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上进行第一步的谱分解. 为此我们首先引进不完全 θ 级数的概念. 设 $\psi(y)$ 是一个在 $(0,\infty)$ 上有紧支集的光滑函数，ψ 所对应的**不完全 θ 级数**

定义为

$$\theta_\psi(z) = \sum_{g\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\psi(\mathrm{Im}(gz)),$$

其中与前面一样 $\Gamma_\infty = \left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbf{Z}\right\}$. 显然 $\theta_\psi(z)$ 在群 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$的作用下不变. 由于 ψ 有紧支集,我们看出 $\theta_\psi(z)$属于空间 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$. 我们记 $\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$为 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中由所有 θ_ψ 张成的闭子空间.

取 f 为 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中任意一个函数,则由于 $f(z)$在 Γ 作用下不变,

$$(\theta_\psi,f) = \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\theta_\psi(z)\,\bar{f}(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathfrak{H}}\psi(y)\,\bar{f}(z)\mathrm{d}z.$$

从 $\Gamma_\infty\backslash\mathfrak{H}\cong\{x+\mathrm{i}y\,|\,0<x\leqslant 1, y>0\}$,我们得出

$$(\theta_\psi,f) = \int_0^\infty\psi(y)\left(\int_0^1\bar{f}(z)\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

根据此式我们得出 $f\in L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$与 $\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$正交当且仅当

$$\int_0^1 f(z)\mathrm{d}x = 0$$

对所有 $y>0$ 都成立. 这最后的一个条件等价于 $f(z)$的 Fourier 级数

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n(y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}$$

中的常数项 $c_0(y)$恒等于零. 因此以上所证明的结果可以表述为:

引理 1 设 $\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$为 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中所有不完全 θ 级数所张成的闭子空间,又设 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$为 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中 Fourier 级数常数项为零的函数所构成的子空间,则 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$可以正交分解为

$$L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H}) = L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\oplus\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H}).$$

我们需要另一个引理.

引理 2 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$为 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中 Maass 尖点形式所张成的闭子空间.

证明 我们考虑 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中光滑函数所生成的子空间，其在 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中稠密. 将 Laplace 算子作用在 $f(z)$的 Fourier 级数上，由于 $c_0(y)=0$，我们知道$(\Delta f)(z)$亦有常数项为零的 Fourier 级数，即 Δf 属于 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$. 因此 $\Delta(L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H}))\subset L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$. 我们已知 Laplace 算子是一个自共轭算子，故由自共轭算子的谱分解定理，$L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$可由 Laplace 算子的特征函数张成，即 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$等于 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中尖点形式所生成的闭子空间.

以下我们记 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})=L_{\mathrm{cusp}}^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$，则从上面两个引理我们得到

定理 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$可以正交分解为不完全 θ 级数所张成的闭子空间 $\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$与 Maass 尖点形式所张成的闭子空间 $L_{\mathrm{cusp}}^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$的直和.

§6 子空间 $L_{\mathrm{cusp}}^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$上的特征值

子空间 $\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$上的 Δ 的谱分解需要用到 Eisenstein 级数的理论，我们 §8 再进一步讨论，在本节中我们仅介绍关于子空间 $L_{\mathrm{cusp}}^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$上非欧 Laplace 算子的谱分解的一些结果，其证明可见参考文献[6]等书籍.

首先我们指出 $L_{\mathrm{cusp}}^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$上的谱分解是离散的，有关证明可参看参考文献[36]，由于 Δ 是 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$上稠密定义的对称且正定算子，其特征值 λ 大于或等于 0. 从 §3 我们已知当 $\lambda\geqslant 1/4$ 时所有 Maass 波动形式都是尖点形式. 对应于特征值 $\lambda=0$ 的特征函数为常数函数. 在区间$(0,1/4)$之中的特征值被称为**例外特征值**. 在 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$的情况下，Maass[3]与 Roelcke[12]曾证明例外特征值不存在. 下面我们看 Roelcke 的一个命题(见参考文献[18]，第 50 页，又见参考文献[19]，第 511，512 页).

定理 1 设 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$，则任意 Maass 尖点形式的特征值均

$>3\pi^2/2$.

证明 设 $f(z)$为一个以 λ 为特征值的 Maass 尖点形式,满足

$$\Delta f = \lambda f, \quad (f,f) = 1,$$

则

$$\lambda = (\lambda f, f) = (\Delta f, f) = \int_D \bar{f}(z)\Delta f(z)\mathrm{d}z,$$

其中 D 为 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$的基本域. 根据 §4 最后的计算,上面的积分可以表示为

$$-\int_D \bar{f}(z)\Delta' f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

将基本域 D 在映射 $z\mapsto -1/z$ 下的映像记作 D_1,则有

$$2\lambda = \int_{D\cup D_1}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \int_I\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中

$$I = \{z = x + \mathrm{i}y \mid -1/2 \leqslant x \leqslant 1/2,\ y \geqslant \sqrt{3}/2\}.$$

由 $f(z)$的 Fourier 级数

$$f(z) = \sum_{n\neq 0} c_n(y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}$$

出发,我们得到

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{n\neq 0} 2\pi\mathrm{i}nc_n(y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx},$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 = \sum_{\substack{n\neq 0\\ m\neq 0}} (2\pi)^2 nmc_n(y)\,\overline{c_m(y)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(n-m)x},$$

及

$$\int_{-1/2}^{1/2}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x = \sum_{n\neq 0}(2\pi n)^2|c_n(y)|^2.$$

因此

$$2\lambda \geqslant \int_{3^{1/2}/2}^{\infty}\sum_{n\neq 0}(2\pi n)^2|c_n(y)|^2\mathrm{d}y > (2\pi)^2\int_{3^{1/2}/2}^{\infty}\sum_{n\neq 0}|c_n(y)|^2\mathrm{d}y$$

$$\geqslant 3\pi^2\int_{3^{1/2}/2}^{\infty}\sum_{n\neq 0}|c_n(y)|^2\frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

这里最后的积分等于

$$\int_I |f(z)|^2 \mathrm{d}z \geqslant \int_D |f(z)|^2 \mathrm{d}z = 1,$$

故我们推出 $2\lambda > 3\pi^2$. 命题得证.

设 Γ 为 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$的 Hecke 同余子群

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}) \middle| c \equiv 0 (\mathrm{mod}\ N) \right\}.$$

当 $N \leqslant 17$ 时类似的命题由 Huxley[13]证明. 由此我们知道对于 $\Gamma = \Gamma_0(N)$, $N \leqslant 17$, 不存在例外特征值. 对于一般的同余子群 Selberg 猜想例外特征值亦不存在, 即 $\lambda \geqslant 1/4$. 这方面的第一个主要结果是 Selberg 本人得出的, 他证明了:

定理 2 设 Γ 为 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$的任意一个同余子群, 则其上任意 Maass 尖点形式的特征值均 $\geqslant 3/16$.

我们指出, 这个命题被 Jacquet 与 Gelbart[18]改进为 $\lambda > 3/16$, 即取等号的情况不存在. 罗文治、Rudnick、Sarnak[85]将此结果改进为 $\lambda \geqslant 21/100$. 又见参考文献[92]. Kim 与 Shahidi 最近又对此作了更进一步的改进.

可以证明子空间 $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$可以由正交的、平方可积的、$\Delta$ 的特征函数(即 Maass 尖点形式)张成. 该证明除依赖于 Hilbert 空间理论外, 主要根据下面的结果:

定理 3 对于任意一个正数 ν 可以找到一个正整数 N, 使得任意一个 $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$的 N 维子空间中都包含一个尖点形式 f 满足

$$\iint_D \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \nu \iint_D |f(z)|^2 \mathrm{d}z.$$

关于这个命题的证明可见参考文献[13]. 在此我们要指出由这个不等式可推出非欧 Laplace 算子在 $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$上是一个紧致自共轭算子的逆算子, 于是 $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$可以由尖点形式组成的一个正交系张成. 我们又可以进而证明这个正交系所对应的特征值

是离散的，以下记作

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots,$$

其中 λ_1 到 λ_2 及以后可能取等号是因为可能出现多重特征值.

以上我们曾证明对于 $\Gamma = SL(2,\mathbf{Z})$，$\lambda_1 > 3\pi^2/2$. Cartier[4]等人曾作计算 $\lambda_1 = 91.1413\cdots$（见参考文献[19]，第 651 页）. 注意他们的计算实际上是对 ν 进行的，而 $\lambda = \nu^2 + 1/4$. 对于 λ_1 以后的特征值的分布有 Weyl 的渐近定律.

定理 4 对于 SL(2,**Z**)的任意同余子群 Γ（包括 $\Gamma = SL(2,\mathbf{Z})$ 的情况），不大于 λ 的非欧 Laplace 算子的特征值的个数 $N_\Gamma(\lambda)$ 等于

$$N_\Gamma(\lambda) = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})}{4\pi}\lambda + O(\lambda^{1/2}\log\lambda).$$

由此渐近定律我们可确知 Maass 尖点形式存在，且 λ_j 趋向于无穷大.

特别对于 $\Gamma = SL(2,\mathbf{Z})$，由于 $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{H}) = \pi/3$，有

$$N_{SL(2,\mathbf{Z})}(\lambda) = \frac{\lambda}{12} + O(\lambda^{1/2}\log\lambda).$$

Weyl 渐近定律的证明需要用到 Selberg 迹公式，我们下一章介绍了 Selberg 迹公式后还会再回到这个问题上. 有关 Weyl 渐近定律误差项的改进，可参见参考文献[9]及[20].

Weyl 的渐近定律最终解决了 Maass 尖点形式存在性的证明. 虽然对 SL(2,**Z**)的同余子群来说有无穷多个 Maass 尖点形式，迄今为止尚无人能切实构造出一个尖点形式. 这个情形与解析模形式理论有鲜明的对比. 对于解析模形式，其尖点形式的构造是熟知的，其中最著名的自然要算权为 12 的 Ramanujan 尖点形式

$$\Delta(z) = (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24},$$

其中 $q = e^{2\pi i z}$（见参考文献[21]）. 关于非解析尖点形式的构造问题，近年的进展是由 Andrew Wiles 等作出的，其工具为代数几何.

与非欧 Laplace 算子相关的另一个问题是其相邻特征值的差

$\lambda_j-\lambda_{j-1}$满足什么样的统计规律. 通过计算机作出的大量运算表明,在某些情形下,相邻特征值的差服从量子物理学中发现的大原子能量谱的特殊统计分布. 而另一方面,数论中与素数相关的量一般均满足统计学中的一般的随机分布. 非欧 Laplace 算子相邻特征值的差所满足的特殊分布于是成为非解析模形式理论中的一个重要课题. 有关这方面的猜想与进展,可见参考文献[86].

§7 Eisenstein 级数的 Fourier 展开

由于 Eisenstein 级数在矩阵$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$的作用下不变,即$E(z,s)=E(z+1,s)$,故有 Fourier 级数展开式

$$E^*(z,s)=\sum_{r\in Z}a_r(y,s)e^{2\pi irx},$$

其中 Fourier 系数由下式给出

$$a_r(y,s)=\int_0^1 E^*(x+iy,s)e^{-2\pi irx}dx.$$

我们回到 $E^*(z,s)$在 §2 定义中的表达式. 如 $m=0$,则我们得到下面的级数

$$\frac{\pi^{-s}}{2}\Gamma(s)\sum_{n\neq 0}\frac{y^s}{n^{2s}}.$$

由于它的项与 x 无关,故他们只出现在 $a_0(y,s)$的计算之中. 上面的级数显然等于

$$\xi(s)y^s,$$

其中 $\xi(s)=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)$. 设 $m\neq 0$,我们可把对应项的积分写成

$$\pi^{-s}\Gamma(s)y^s\sum_{m\geqslant 1}\sum_{n\in Z}\int_0^1\frac{e^{-2\pi irx}}{((mx+n)^2+m^2y^2)^s}dx$$

$$=\pi^{-s}\Gamma(s)y^s\sum_{m\geqslant 1}\sum_{n(\mathrm{mod}\ m)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2\pi irx}}{((mx+n)^2+m^2y^2)^s}dx.$$

作变量替换 $x\mapsto x-\frac{n}{m}$,上式右端变为

$$\pi^{-s}\Gamma(s)y^s\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^{2s}}\sum_{n(\bmod m)}e^{2\pi rn/m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2\pi rx}}{(x^2+y^2)^s}dx.$$

由于

$$\sum_{n(\bmod m)}e^{2\pi rn/m}=\begin{cases}m, & 如果\ m\mid r, r\neq 0,\\ 0, & 如果\ m\nmid r, r\neq 0,\\ m, & 如果\ r=0.\end{cases}$$

上式右端又等于

$$\pi^{-s}\Gamma(s)y^s\sum_{m\mid r}m^{1-2s}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2\pi rx}}{(x^2+y^2)^s}dx.$$

在此我们要用一个微积分公式

$$\left(\frac{y}{\pi}\right)^s\Gamma(s)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2\pi rx}}{(x^2+y^2)^s}dx$$
$$=\begin{cases}\pi^{-s-1/2}\Gamma(s-1/2)y^{1-s}, & 当\ r=0\ 时,\\ 2|r|^{s-1/2}\sqrt{y}K_{s-1/2}(2\pi|r|y), & 当\ r\neq 0\ 时,\end{cases}$$

其中 K 为修正第三类 Bessel 函数. 根据这个公式,并加上前述 $r=0$ 时 $\xi(s)y^s$ 的项,我们得出

$$a_0(y,s)=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)y^s+\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\zeta(2-2s)y^{1-s},$$

$$a_r(y,s)=2|r|^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(|r|)\sqrt{y}K_{s-1/2}(2\pi|r|y),\quad r\neq 0,$$

其中前一式我们用到了 Riemann ζ-函数的函数方程,而后一式中

$$\sigma_{1-2s}(|r|)=\sum_{m>0,m\mid r}m^{1-2s}$$

是一除数函数. 因此 Eisenstein 级数的 Fourier 展开式为

$$E^*(z,s)=\xi(s)y^s+\xi(1-s)y^{1-s}$$
$$+2\sqrt{y}\sum_{n\neq 0}|n|^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(|n|)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx}.$$

§8 Eisenstein 级数的解析延拓及性质

在§7末尾给出了 $E^*(z,s)$的表达式. 注意我们对 $E^*(z,s)$的 Fourier 级数的计算一直是在半平面 Re $s>1$ 中进行的. 但从这个

Fourier 级数中我们可以得到 $E^*(z,s)$作为 s 的函数的解析延拓.首先,第一项 $\xi(s)y^s$ 在 $s=0$ 与 $s=1/2$ 处有单极点,留数在 $s=1/2$ 处为$\sqrt{y}/2$,在 $s=0$ 处为 $-1/2$. 同样第二项 $\xi(1-s)y^{1-s}$在 $s=1$ 与 $s=1/2$ 处也有单极点,在 $s=1/2$ 处的留数等于 $-\sqrt{y}/2$,在 $s=1$ 处等于 $1/2$. 故头两项的和在 $s=0$ 和 $s=1$ 处有单极点,而在 $s=1/2$ 处解析.

为了研究上面级数的收敛性质,我们利用 $K_s(y)$的积分表达式

$$K_s(y) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y(t+t^{-1})/2} \cdot t^{s-1}\mathrm{d}t$$

来证明修正第三类 Bessel 函数是速降函数. 首先如果 $a,b>2$,则 $ab>a+b$,故 $\mathrm{e}^{-ab}<\mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{-b}$. 对于 $y>4$ 我们取 $a=y/2,b=t+t^{-1}$,于是

$$\begin{aligned}|K_s(y)| &< \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y/2} \cdot \mathrm{e}^{-(t+t^{-1})}|t^{s-1}|\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-y/2}K_{\mathrm{Re}\,s}(2).\end{aligned}$$

从这个估计式中我们可看出对于任意在 $\boldsymbol{C}$ 的一个紧致子集中取的 s,上面的级数均对 s 一致收敛. 所以该级数是 s 的一个全纯函数. 结合上面对第一、二两项的讨论,我们通过 $E^*(z,s)$的 Fourier 展开,将其解析延拓至全复平面. 换句话说,Eisenstein 级数 $E^*(z,s)$是 s 的一个半纯函数,在全复平面 $\boldsymbol{C}$ 上仅 $s=0$ 与 $s=1$ 两个单级点. 注意,$E(z,s)$对于 z 来说仅仅是一个实解析函数,而不是复变数的解析函数.

我们在此要指出,以上 $E(z,s)$解析延拓的证明仅当群 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 时成立,因为此时 $E^*(z,s)$的 Fourier 级数包含有 Bessel 函数,我们可利用其性质. 对于其他 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$的算术子群 Γ_1 所对应的 Eisenstein 级数仍然可以延拓成半纯函数,但证明要复杂得多,可参见参考文献[88]中 § 11. 该文献中的证明是 Bernstein 根据 Selberg 的所谓"第三证明"给出的,但在此文献成书之前,该证

明的细节从未发表. 参见参考文献[89]及[19]中的第二卷附录 F.

从 $E^*(z,s)$的 Fourier 展开式我们还可得出 Eisenstein 级数的函数方程. 显然, Fourier 级数的头两项 $\xi(s)y^s+\xi(1-s)y^{1-s}$对于 $s\mapsto 1-s$ 的变换不变. 而后面级数中的$|n|^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(|n|)$对于 $s\mapsto 1-s$ 也不变:

$$|n|^{1/2-s}\sigma_{2s-1}(|n|) = |n|^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(|n|).$$

在 $K_s(y)$的积分表达式中作变量替换 $t\mapsto 1/t$, 我们可看出

$$K_s(y) = K_{-s}(y).$$

故

$$K_{s-1/2}(2\pi|n|y)$$

也在变换 $s\mapsto 1-s$ 下不变. 因此我们得到 $E(z,s)$的函数方程

$$E^*(z,s) = E^*(z,1-s).$$

解析延拓后的 Eisenstein 级数 $E^*(z,s)$仍然满足定义 1 的条件(1)和条件(2). 这是因为我们可对 $E^*(z,s)$, $E^*(gz,s)$与 $\Delta E^*(z,s)$进行解析延拓. 由于在半平面上 $E^*(gz,s)=E^*(z,s)$, $\Delta E^*(z,s)=\lambda E^*(z,s)$, $g\in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$, 我们知道这两等式对所有 $s\neq 0,1$ 都成立.

定义 1 的条件(3)的验证也要从 $E^*(z,s)$的 Fourier 级数出发. 由于

$$|K_{s-1/2}(2\pi|n|y|) < \mathrm{e}^{-\pi|n|y}K_{\mathrm{Re}\, s-1/2}(2),$$

我们得出当 $y\to\infty$时, $E^*(z,s)$的渐近性质由其 Fourier 级数的头两项

$$\xi(s)y^s + \xi(1-s)y^{1-s}$$

给出. 故我们可以取 $N=\max(\mathrm{Re}\, s, 1-\mathrm{Re}\, s)$, 则

$$E^*(x+\mathrm{i}y,s) = O(y^N),$$

即条件(3)成立. 这样我们终于验证了非解析 Eisenstein 级数 $E^*(z,s)$是一个 Maass 波动形式, 其所对应的非欧 Laplace 算子的特征值为 $s(1-s)$, 而条件(3)对 $N=\max(\mathrm{Re}s,1-\mathrm{Re}s)$成立. 注意当 $s=0,1$ 时 $E^*(z,s)$有单极点, 故没有以上的估计.

因为 $\max(\mathrm{Re}s, 1-\mathrm{Re}s)$ 永远 $\geqslant 1/2$，所以积分

$$\int_D |E^*(z,s)|^2 \mathrm{d}z$$

发散，$E^*(z,s)$ 不属于空间 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$，$\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$. 但是当 $s=1/2+\mathrm{i}t$ 时，Eisenstein 级数 $E(z,s)$ 几乎就可以平方可积了. 我们在§10 中就会看出，当 $s=1/2+\mathrm{i}t$ 时 Eisenstein 级数对 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上 Δ 的谱分解起着重要作用.

§9　在 Riemann ζ-函数上的应用

上面几节中发展出的 Eisenstein 级数的理论可以应用到 Riemann ζ-函数上去，证明 $\zeta(s)$ 在直线 $\mathrm{Re}\, s=1$ 上不为零(参见参考文献[14]).

定理　对于 Riemann ζ-函数 $\zeta(s)$，有 $\zeta(1+\mathrm{i}t)\neq 0$ 对所有 t 成立.

证明　设 $\zeta(1+\mathrm{i}t)=0$，则对这个 $t\in\boldsymbol{R}$ 我们有

$$\xi\left(\frac{1+\mathrm{i}t}{2}\right)=\pi^{-(1+\mathrm{i}t)/2}\Gamma\left(\frac{1+\mathrm{i}t}{2}\right)\zeta(1+\mathrm{i}t)=0$$

及

$$\xi\left(1-\frac{1+\mathrm{i}t}{2}\right)=\pi^{-(1-\mathrm{i}t)/2}\Gamma\left(\frac{1-\mathrm{i}t}{2}\right)\zeta(1-\mathrm{i}t)=0.$$

于是在 $s=(1+\mathrm{i}t)/2$ 时 Eisenstein 级数等于

$$E^*\left(z,\frac{1+\mathrm{i}t}{2}\right)=2\sqrt{y}\sum_{n\neq 0}|n|^{\mathrm{i}t/2}\sigma_{-\mathrm{i}t}(|n|)K_{\mathrm{i}t/2}(2\pi|n|y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}.$$

根据上一节中对修正第三类 Bessel 函数的估计

$$|K_{\mathrm{i}t/2}(2\pi|n|y)|<\mathrm{e}^{-\pi|n|y}K_0(2),$$

我们就可以得出 $E^*(z,(1+\mathrm{i}t)/2)$ 是 y 的一个速降函数，同时 $E^*(z,(1+\mathrm{i}t)/2)$ 不恒等于零.

对于任意一个 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上的速降函数 $f(z)$，在不引起混淆的情况下，我们记

$$c_0(y) = \int_0^1 f(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}x$$

为 $f(z)$的 Fourier 展开的常数项. 又记

$$I(f;s) = \int_0^{\infty} c_0(y) y^{s-2}\mathrm{d}y$$

为$\frac{1}{y}c_0(y)$的 Mellin 变换,其中积分当 Re $s>1$ 时收敛. 由于 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y/y^2$,我们得到

$$I(f;s) = \int_0^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^1 f(x+\mathrm{i}y)y^{s-2}\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathfrak{H}} f(z)y^s\mathrm{d}z,$$

其中 $\Gamma_\infty = \left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})\right\}$. 从 $f(z)$在 $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$作用下不变的性质,我们又得出

$$I(f;s) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} f(z)\sum_{g\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}(\mathrm{Im}(gz))^s\mathrm{d}z.$$

这里的系数 1/2 是由于 $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$中的$\{\pm\mathrm{id}\}$在 $\mathfrak{H}$ 上的作用为恒同变换. 故从 Eisenstein 级数的表达式

$$E^*(z,s) = \frac{\pi^{-s}}{2}\Gamma(s)\zeta(2s)\sum_{g\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}(\mathrm{Im}(gz))^s$$

可以推出 $f(z)$的 Fourier 级数常数项 $c_0(y)$的 Mellin 变换 $I(f;s)$满足

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)I(f;s) = \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} f(z)E^*(z,s)\mathrm{d}z.$$

注意这里的计算是在 Re $s>1$ 的条件下进行的.

我们现在取

$$f(z) = E^*\left(z,\frac{1+\mathrm{i}t}{2}\right),$$

则其 Fourier 级数常数项 $c_0(y)$等于零,且 $f(z)$为 y 的速降函数. 故当 Re $s>1$ 时 $I(f;s)$恒等于 0,并且

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} E^*\left(z,\frac{1+\mathrm{i}t}{2}\right)E^*(z,s)\mathrm{d}z = 0$$

对于所有半平面 $\mathrm{Re}\ s>1$ 中的 s 都成立. 根据 $E^*(z,s)$的解析开拓,这等式对全平面中的 s 也都成立. 取 $s=(1-\mathrm{i}t)/2$.则得出

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\left|E^*\left(z,\frac{1+\mathrm{i}t}{2}\right)\right|^2\mathrm{d}z=0,$$

这与 $E^*(z,(1+\mathrm{i}t)/2)$不恒等于零的事实矛盾. 命题得证.

这个证明的思路被 Jacquet 与 Shalika[15]推广到代数数域与函数域上的 GL(n)的群表示所对应的 ζ 函数上,用以证明了这些 ζ 函数在直线 $\mathrm{Re}\ s=1$ 上亦不为零.

§10 非欧 Laplace 算子的谱分解——Eisenstein 级数

在§5 我们将 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$分解为

$$L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})=L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\oplus\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H}),$$

其中 $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$为 Maass 尖点形式所张成的闭子空间,而$\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$是不完全 θ 函数所张成的闭子空间. 在本节中,我们要对$\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$进行进一步地分解.

定理(Zagier[16]) 设$\{u_j\}_{j\geqslant1}$为 $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$的一组正交基,又设 u_0 为常数函数恒等于 1. 对于任意一个函数 $f\in L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$,如果 $f(z)=O(y^{-\varepsilon})$对于某一个 $\varepsilon>0$ 成立,并且 $f(z)$是 y 的一个连续有界变差函数,则

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(f,u_j)}{(u_j,u_j)}u_j(z)$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f,E\left(\cdot,\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right)E\left(z,\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\mathrm{d}t.$$

证明 设

$$I(f,s)=(f,E(\cdot,\bar{s}))=\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}f(z)E(z,s)\mathrm{d}z.$$

由于 $E(z,s)=O(y^{\max(\mathrm{Re}\,s,1-\mathrm{Re}\,s)})$, $f(z)=O(y^{-\varepsilon})$, 及 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y/y^2$, 上面定义 $I(f,s)$的积分在$-\varepsilon<\mathrm{Re}\ s<1+\varepsilon$ 时收敛,但在 $s=1$ 时

是一个例外. 在 $s=1$ 时 $E^*(z,s)$ 有一单极点，留数为 $1/2$，故在 $s=1$ 时，

$$E(z,s)=\frac{1}{\xi(s)}E^*(z,s)$$

也有一单极点，其留数为 $1/(2\xi(1))=\pi/(2\zeta(2))=3/\pi$（我们知道 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$，$\xi(s)=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)$）. 因此函数 $I(f,s)$ 在 $s=1$ 处也有一单极点，其留数等于

$$\operatorname*{Res}_{s=1}I(f,s)=\frac{3}{\pi}\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}f(z)\mathrm{d}z.$$

我们注意到此式右端的积分实际上等于 (f,u_0)，而 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 在测度 $\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}$ 下的面积可直接算出等于 $\pi/3$，故 $(u_0,u_0)=\pi/3$. 因此

$$\operatorname*{Res}_{s=1}I(f,s)=\frac{(f,u_0)}{(u_0,u_0)}u_0.$$

由于 $E^*(z,s)$ 满足函数方程 $E^*(z,s)=E^*(z,1-s)$，可以看出 $E(z,s)$ 满足函数方程

$$E(z,s)=\frac{\xi(1-s)}{\xi(s)}E(z,1-s),$$

故亦有

$$I(f,s)=\frac{\xi(1-s)}{\xi(s)}I(f,1-s).$$

在上一节定理证明的过程中我们曾用到

$$\begin{aligned}I(f,s)&=\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}f(z)E(z,s)\mathrm{d}z=\int_0^\infty\int_0^1 f(z)y^s\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}\\&=\int_0^\infty c_0(y)y^{s-2}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

即 $I(f,s)$ 为 $c_0(y)/y$ 的 Mellin 变换，其中 $c_0(y)$ 为 $f(z)$ 的 Fourier 级数的常数项. 我们回忆如果一个函数 $g(x)$ 满足 $g(x)x^{k-1}\in L^1(0,\infty)$，则其 Mellin 变换为

$$G(s)=\int_0^\infty g(x)x^{s-1}\mathrm{d}x,$$

其中 $s=k+it$. 由于我们的 $f(z)=O(y^{-\epsilon})$，其常数项亦满足 $c_0(y)=O(y^{-\epsilon})$（因其 Fourier 级数其他项均为 y 的速降函数）. 故对于 $c_0(y)/y$ 来说其 Mellion 变换 $I(f,s)$ 当 $1<\mathrm{Re}\ s<1+\epsilon$ 时收敛. 如果我们又假设 $f(z)$ 满足某些额外的解析条件，例如 $f(z)$ 对于 y 来说连续并有有界变差，则我们得到 Mellin 逆变换

$$\frac{1}{y}c_0(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}I(f,s)y^{-s}\mathrm{d}s,$$

即

$$c_0(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}I(f,s)y^{1-s}\mathrm{d}s,$$

其中 $1<c<1+\epsilon$.

我们接着将积分路径从 $\mathrm{Re}\ s=c$ 移到 $\mathrm{Re}\ s=1/2$，利用上面已经计算出来的留数，得到

$$c_0(y)=\frac{(f,u_0)}{(u_0,u_0)}u_0+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}I\left(f,\frac{1}{2}-it\right)y^{\frac{1}{2}+it}\mathrm{d}t.$$

应用 $I(f,s)$ 的函数方程

$$I\left(f,\frac{1}{2}-it\right)=\frac{\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\xi\left(\frac{1}{2}-it\right)}I\left(f,\frac{1}{2}+it\right),$$

我们又可将上式写成

$$c_0(y)=\frac{(f,u_0)}{(u_0,u_0)}u_0+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}I\left(f,\frac{1}{2}-it\right)\times\left[y^{\frac{1}{2}+it}+\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-it\right)}{\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)}y^{\frac{1}{2}-it}\right]\mathrm{d}t.$$

回到 $E(z,s)$ 的 Fourier 展开式，我们看出

$$y^{\frac{1}{2}+it}+\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-it\right)}{\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)}y^{\frac{1}{2}-it}$$

为 $E\left(z,\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$ 的常数项. 故由上式可以推出函数

$$\tilde{f}(z)=f(z)-\frac{(f,u_0)}{(u_0,u_0)}u_0$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}I\left(f,\frac{1}{2}-\mathrm{i}t\right)E\left(z,\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\mathrm{d}t$$

的 Fourier 级数常数项等于

$$c_0(y)-\frac{(f,u_0)}{(u_0,u_0)}u_0-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}I\left(f,\frac{1}{2}-\mathrm{i}t\right)$$
$$\times\left(y^{\frac{1}{2}+\mathrm{i}t}+\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}t\right)}{\xi\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)}y^{\frac{1}{2}-\mathrm{i}t}\right)\mathrm{d}t=0.$$

由于 $f(z)$ 与 $E\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$ 的 Fourier 级数中非常数项的项均为 y 的速降函数，我们又推知 $\tilde{f}(z)$ 在 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上平方可积. 因此 $\tilde{f}\in L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$. 根据 $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的谱分解（§6），我们得到

$$\tilde{f}(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\tilde{f},u_j)}{(u_j,u_j)}u_j(z).$$

故由 $(\tilde{f},u_j)=(f,u_j)$，$j\geqslant 1$，我们最后得到

$$f(z)-\frac{(f,u_0)}{(u_0,u_0)}u_0(z)$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f,E\left(\cdot,\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right)E\left(z,\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(f,u_j)}{(u_j,u_j)}u_j(z).$$

定理得证.

如果我们仅假定 $f\in L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 而去掉加在 $f(z)$ 上的其他假设，则命题中的谱分解公式依然正确，其右边的级数与积分改为依 L^2 范数收敛. 关于其详细证明，可见参考文献[17].

§ 11　Hecke 算子

Hecke 算子在模形式理论中占有很重要的地位. 我们这里依照 Kuznetsov[7]的思路进行介绍.

设 a,b,c,d 为整数满足 $ad-bc=n$，则线性变换

$$z \to Mz = \frac{az+b}{cz+d}$$

被称为一个 **n 阶线性变换**. 自然，如果 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$，则其线性变换就是一阶的. 两个 n 阶线性变换 M_1 和 M_2 被称作等价的，假如有一个 $g\in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$使得 $M_1=gM_2$.

对任意一个行列式为 n 的整数矩阵 M 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$下进行行变换，我们都可将 M 惟一地变成$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$，其中 $ad=n, b=0,1,\cdots,d-1, d>0$. 故下列矩阵代表了 n 阶线性变换的所有互不等价的等价类：

$$M_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ 0 & d_j \end{pmatrix}, \quad a_jd_j = n, b_j = 0,1,\cdots,d_j-1, d_j > 0.$$

可以看出这里一共有 $\sigma(n)=\sum_{d|n} d$ 个 n 阶互不等价的等价类.

如果 M_j 取遍所有 n 阶等价类，则对于任意一个固定的 $g\in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$，$M_jg$ 也取遍所有 n 阶的等价类. 因此对于任意一个 $\mathfrak{H}$ 上的模形式 $f(z)$，以下 $\sigma(n)$个函数

$$f(M_1gz),\cdots,f(M_{\sigma(n)}gz)$$

是 $f(M_1z),\cdots,f(M_{\sigma(n)}z)$的一个置换. 这里我们用到了这么一个事实，如果 M_1g 与 M_j 等价，则有一个 $h\in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$使得 $M_1g=hM_j$，于是 $f(M_1gz)=f(hM_jz)=f(M_jz)$. 从这个性质我们看出 $f(M_1z)+\cdots+f(M_{\sigma(n)}z)$在变换 $z\to gz$ 下不变.

假如 $f(z)$是一个 Maass 波动形式，则

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\sigma(n)} f(M_j z)$$

也是一个 Maass 波动形式. 事实上, 定义 1 的条件(1)已由上面给出. 条件(3)亦可直接看出. 对于条件(2), 我们注意到

$$\Delta(f(M_j z)) = (\Delta f)(M_j z) = \lambda f(M_j z),$$

故 $1/\sqrt{n}\sum f(M_j z)$也是非欧 Laplace 算子的特征函数, 特征值仍为 λ.

这样我们得到一个从 Maass 波动形式所成的空间到其自身的一个映射

$$f(z) \to \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\sigma(n)} f(M_j z).$$

这个映射就是 n **级 Hecke 算子**, 记作 $T(n)$:

$$(T(n)f)(z) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\sigma(n)} f(M_j z).$$

注意 $T(n)$并不依赖于 n 阶线性变换等价类的代表 M_j 的选择.

§12　Hecke 算子的交换性

所有的 Hecke 算子 $T(n)(n=1,2,\cdots)$都互相交换, 这个事实由下面的定理得到, 其证明最初是由 Hecke 给出的.

定理　对任意正整数 n 与 m, 我们有

$$T(n)T(m) = \sum_{d\mid(n,m)} T\left(\frac{nm}{d^2}\right).$$

证明　我们分四步证明.

(1) 设$(n,m)=1$. 连续两次用 Hecke 算子的定义, 我们得到

$$(T(n)T(m)f)(z)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{nm}}\sum_{\substack{ad=n\\ b(\bmod d)}}\sum_{\substack{a'd'=m\\ b'(\bmod d')}} f\left(\frac{aa'z+a'b+b'd}{dd'}\right).$$

由于$(n,m)=1$, aa'与 dd'取遍 nm 的所有正因子, 而 $a'b+b'd$ 取

遍模 dd' 的一个完全剩余系. 故上式右边等于 $T(nm)$，定理在 $(m,n)=1$ 时成立.

(2) 设 p 为一素数，r 为一正整数，$m=p$，$n=p^r$. 我们有

$$T(p)f = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(f(pz) + \sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{z+b}{p}\right)\right),$$

$$T(p^r)T(p)f = p^{-\frac{r+1}{2}} \sum_{k=0}^{r} \sum_{t=0}^{p^k-1} \left(f\left(\frac{p^{r-k+1}z + tp}{p^k}\right) \right.$$

$$\left. + \sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{p^{r-k}z + t + bp^k}{p^{k+1}}\right)\right).$$

由于上式右边第二个和式中的 $t+bp^k$ 在 k 固定的情况下取遍模 p^{k+1} 的一个完全剩余系，我们得到 $(T(p^{r+1})f)(z)$ 但缺一项 $f(p^{r+1}z)$，故这第二个和式等于

$$(T(p^{r+1})f)(z) - f(p^{r+1}z)p^{-\frac{r+1}{2}}.$$

上式右边第一个和式对于固定的 $k\geqslant 1$ 等于

$$\sum_{t=0}^{p^k-1} f\left(\frac{p^{r-k}z + t}{p^{k-1}}\right) = p\sum_{t=0}^{p^{k-1}-1} f\left(\frac{p^{r-k}z + t}{p^{k-1}}\right),$$

而对于固定的 $k=0$ 等于 $f(p^{r+1}z)$. 所以这第一个和式等于

$$(T(p^{r-1})f)(z) + f(p^{r+1}z)p^{-\frac{r+1}{2}}.$$

于是

$$T(p^r)T(p) = T(p^{r+1}) + T(p^{r-1}),$$

即定理对 $n=p^r$，$m=p$ 成立.

(3) 设 $n=p^r$，$m=p^s$，其中 r,s 为正整数. 我们对 s 作归纳法. 设对 $s\leqslant r$，

$$T(p^r)T(p^s) = \sum_{k=0}^{s} T(p^{r+s-2k})$$

成立. 在此式两端乘以 $T(p)$. 从(2)中的结果我们看出 $T(p^r)$，$T(p^s)$ 均可表为 $T(p)$ 的多项式，故 $T(p)$、$T(p^r)$ 与 $T(p^s)$ 之间都可以交换. 于是

$$T(p)T(p^r)T(p^s) = T(p^r)(T(p^{s+1}) + T(p^{s-1})),$$

$$T(p)T(p^{r+s-2k}) = T(p^{r+s-2k+1}) + T(p^{r+s-2k-1}),$$
$$\text{如果 } r+s > 2k.$$

故当 $s<r$ 时，

$$T(p)\sum_{k=0}^{s}T(p^{r+s-2k}) = \sum_{k=0}^{s}T(p^{r+s-2k+1}) + \sum_{k=0}^{s}T(p^{r+s-2k-1})$$
$$= \sum_{k=0}^{s+1}T(p^{r+s-2k+1}) + T(p^r)T(p^{s-1}),$$

故

$$T(p^r)T(p^{s+1}) = \sum_{k=0}^{s+1}T(p^{r+s-2k+1}).$$

当 $s=r$ 时，

$$T(p)\sum_{k=0}^{s}T(p^{r+s-2k}) = T(p) + \sum_{k=0}^{s-1}T(p^{r+s-2k+1})$$
$$+ \sum_{k=0}^{s-1}T(p^{r+s-2k-1})$$
$$= \sum_{k=0}^{s}T(p^{r+s-2k+1}) + T(p^r)T(p^{s-1}),$$

故当 $s\leqslant r$ 时，

$$T(p^r)T(p^{s+1}) = \sum_{0\leqslant k\leqslant \min(r,s+1)}T(p^{r+s+1-2k}).$$

通过这个归纳法，我们最终得到

$$T(p^r)T(p^s) = \sum_{0\leqslant k\leqslant \min(r,s)}T(p^{r+s-2k}),$$

即定理对 $n=p^r, m=p^s$ 成立.

（4）由（1）我们知道对于 $(n,m)=1$ 有 $T(nm)=T(n)T(m)$. 故如果 $n=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}, m=p_1^{b_1}\cdots p_r^{b_r}, a_1,\cdots,a_r\geqslant 0, b_1,\cdots,b_r\geqslant 0$，我们有

$$T(n)T(m) = T(p_1^{a_1})T(p_1^{b_1})\cdots T(p_r^{a_r})T(p_r^{b_r}).$$

根据（3）即有

$$T(n)T(m) = \prod_{j=1}^{r}\sum_{0\leqslant k\leqslant \min(a_j,b_j)}T(p_j^{a_j+b_j-2k}) = \sum_{d\mid(n,m)}T\left(\frac{nm}{d^2}\right)$$

对所有正整数 n,m 都成立. 定理证毕.

在上面第(3),(4)步的证明中,我们实际上用到了 Hecke 算子的乘法满足结合律这一性质,这是需要证明的. 首先,如果 n,m,l 两两互素,则

$$(T(n)T(m))T(l) = T(nm)T(l) = T(nml)$$
$$= T(n)(T(m)T(l)),$$

结合律成立. 故在(4)中我们确实可以写

$$T(n) = T(p_1^{a_1})\cdots T(p_r^{a_r}), \quad T(m) = T(p_1^{b_1})\cdots T(p_r^{b_r}).$$

其次,由(2)中的结论我们知道 $T(p^r)$ 可表为 $T(p)$ 的一个多项式. 因此,结合律对 $T(p^r),T(p^s),T(p^t)$ 也成立. 由此可知第(3)部分的运算都满足结合律,都是合法的. 更进一步,$T(n)$ 与 $T(m)$ 之间的乘法可以化成两个以 $T(p_1),\cdots,T(p_r)$ 为未定元的多项式的乘法,故显然满足结合律.

由于 Hecke 算子的乘法是结合的、交换的,Hecke 算子生成一个交换代数,称作 **Hecke 算子代数**.

n 阶 **Tchebychev 多项式** $U_n(x)$ 的定义由下式给出

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

我们要证明对任何正整数 r 成立

$$T(p^r) = U_r\left(\frac{1}{2}T(p)\right).$$

事实上 $U_0(x)=1$,$U_1(x)=2x$,故上式对 $r=0,1$ 成立. 从三角函数恒等式

$$2\cos\theta\sin(r+1)\theta = \sin(r+2)\theta + \sin r\theta,$$

我们得出

$$xU_r\left(\frac{x}{2}\right) = U_{r+1}\left(\frac{x}{2}\right) + U_{r-1}\left(\frac{x}{2}\right).$$

故 Tchebychev 多项式满足与 $T(p^r)$ 一样的递推公式. 因此有

$T(p^r)=U_r\left(\frac{1}{2}T(p)\right)$. 从 $U_r(x)$的明显表达式我们得出

$$T(p^r)=\sum_{0\leqslant k\leqslant r/2}\frac{(-1)^k(r-k)!}{k!(r-2k)!}(T(p))^{r-2k}.$$

§13 Hecke 算子的自共轭性

在模形式空间上的 **Petersson 内积**定义为

$$(f_1,f_2)=\int_D f_1(z)\overline{f_2(z)}\mathrm{d}z,$$

其中积分区域 D 为群 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$在上半平面 $\mathfrak{H}$ 上的基本域，$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y/y^2$.

定理 对任意的正整数 n，Hecke 算子 $T(n)$对于 Petersson 内积是一个自共轭算子：

$$(T(n)f_1,f_2)=(f_1,T(n)f_2).$$

证明 由于 $T(n)$是 $T(p_1),\cdots,T(p_r)$的实系数多项式，上面定理仅需对 $T(p)$进行验证：

$$(T(p)f_1,f_2)=(f_1,T(p)f_2).$$

我们首先指出 $T(p)f$ 有两种表示方法. 第一种表示式为

$$(T(p)f)(z)=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{j=0}^{p}f\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}g_jz\right),$$

其中 $g_j=\begin{pmatrix}1&j\\0&1\end{pmatrix}(j=0,1,\cdots,p-1)$，$g_p=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$；第二种表示式为

$$(T(p)f)(z)=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{j=0}^{p}f\left(\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix}\widetilde{g}_jz\right),$$

其中 $\widetilde{g}_j=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}g_j$. 这里的第一种表示式是在 $T(p)f$ 的定义

$$T(p)f=\frac{1}{\sqrt{p}}\left(f(pz)+\sum_{b=0}^{p-1}f\left(\frac{z+b}{p}\right)\right)$$

中把 $f(pz)$ 换成 $f(-1/(pz))$ 而得出的，而第二种表示式是在 $T(p)f$ 的定义中把 $f((z+b)/p)$ 换成 $f(-p/(z+b))$ 而得出的.

用第一式我们有

$$(T(p)f_1,f_2)=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{j=0}^{p}\int_D f_1\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}g_jz\right)\overline{f_2(z)}\mathrm{d}z,$$

作变量代换 $z'=\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}g_jz$，则 $\overline{f_2(z)}=\overline{f_2\left(g_j^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}^{-1}z'\right)}=\overline{f_2\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}^{-1}z'\right)}$. 由于 $\mathrm{d}z$ 在线性变换下不变，我们有 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}z'$. 记 $D_j=\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}g_jD$ 与 $B=\bigcup_{j=0}^{p}D_j$，我们得到

$$(T(p)f_1,f_2)=\frac{1}{\sqrt{p}}\int_B f_1(z)\overline{f_2\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}^{-1}z\right)}\mathrm{d}z.$$

用第二式计算 $(f_1,T(p)f_2)$，我们类似地得到

$$(f_1,T(p)f_2)=\frac{1}{\sqrt{p}}\int_{\widetilde{B}} f_1(z)\overline{f_2\left(\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix}z\right)}\mathrm{d}z,$$

其中

$$\widetilde{B}=\bigcup_{j=0}^{p}\widetilde{g}_jD.$$

注意 $\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}^{-1}z=\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix}z=pz$，而且 $f_1(z)\overline{f_2\left(\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix}z\right)}$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 的 Hecke 同余子群 $\Gamma_0(p)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})\;\middle|\;p\mid c\right\}$ 的作用下不变. 因此，如要证明 $(T(p)f_1,f_2)$ 与 $(f_1,T(p)f_2)$ 相等，我们只需证明 B 和 $\widetilde{B}$ 均为 Hecke 同余子群 $\Gamma_0(p)$ 在上半平面 $\mathfrak{H}$ 上的基本域.

为此目的，我们首先看到下面的不相交并集

$$\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})=\bigcup_{j=0}^{p}\Gamma_0(p)\widetilde{g}_j,$$

于是

$$\mathfrak{H} = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})D = \Gamma_0(p)\bigcup_{j=0}^{p}\widetilde{g}_jD = \Gamma_0(p)\widetilde{B}.$$

由于这里的并集是不相交的，$\widetilde{B}$ 就是 $\Gamma_0(p)$的一个基本域. 另一方面

$$B = \bigcup_{j=0}^{p}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix}\widetilde{g}_jD = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix}\widetilde{B},$$

$$\Gamma_0(p) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix}\Gamma_0(p)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

故

$$\Gamma_0(p)B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix}\Gamma_0(p)\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix}\mathfrak{H} = \mathfrak{H},$$

B 也是 Hecke 同余子群的一个基本域. 定理得证.

§ 14　Hecke 算子在 Maass 形式上的作用

首先我们来看 Hecke 算子 $T(n)$在 Maass 尖点形式上的作用. 从 § 3 我们知道 Maass 尖点形式有 Fourier 级数展开

$$f(z) = \sum_{m\neq 0}c_m\sqrt{y}K_{i\nu}(2\pi|m|y)\mathrm{e}^{2\pi imx},$$

其中 $\nu=\sqrt{\lambda-1/4}$，λ 为 $f(z)$对应的 Laplace 算子的特征值.

定理 1　设 Maass 尖点形式 $f(z)$有以上 Fourier 级数，则对任意正整数 n，

$$(T(n)f)(z) = \sum_{m\neq 0}t_n(m)\sqrt{y}K_{i\nu}(2\pi|m|y)\mathrm{e}^{2\pi imx},$$

其中

$$t_n(m) = \sum_{\substack{d>0 \\ d|(n,m)}} c_{nm/d^2}.$$

证明　由 $T(n)$的定义得出

$$(T(n)f)(z) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\substack{a>0 \\ ad=n}}\sum_{b(\bmod d)}\sum_{m\neq 0}c_m\sqrt{\frac{ay}{d}}$$

$$\times K_{i\nu}\left(\frac{2\pi|m|ay}{d}\right)e^{2\pi im(ax+b)/d}.$$

由于 $\sum_{b(\bmod d)} e^{2\pi imb/d}$ 当 $d|m$ 时等于 d，而当 $d\nmid m$ 时等于 0，故

$$(T(n)f)(z)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\substack{a>0\\ ad=n}}\sum_{m\neq 0}c_{dm}\sqrt{ady}K_{i\nu}(2\pi|m|ay)e^{2\pi imax}$$
$$=\sum_{m\neq 0}\sqrt{y}K_{i\nu}(2\pi|m|y)e^{2\pi imx}\sum_{\substack{am_1=m\\ ad=n\\ a>0}}c_{dm_1}.$$

定理即由

$$\sum_{\substack{am_1=m\\ ad=n\\ a>0}}c_{dm_1}=t_n(m)$$

得出.

定理 2 对任意正整数 n，

$$(T(n)E)(z,s)=n^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(n)E(z,s).$$

证明 首先

$$T(n)y^s=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{ad=n}\sum_{b(\bmod d)}\left(\frac{ay}{d}\right)^s=n^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(n)y^s.$$

故当 Hecke 算子作用在 $E(z,s)$的 Fourier 级数前两项时有

$$T(n)(\xi(s)y^s+\xi(1-s)y^{1-s})$$
$$=n^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(n)(\xi(s)y^s+\xi(1-s)y^{1-s}).$$

设

$$c_m=|m|^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(|m|),$$

则我们可将上面定理 1 证明中的计算用到 $E(z,s)$的 Fourier 级数其他项上：

$$T(n)\left(\sum_{m\neq 0}2c_m\sqrt{y}K_{s-1/2}(2\pi|m|y)e^{2\pi imx}\right)$$
$$=\sum_{m\neq 0}2\sqrt{y}K_{s-1/2}(2\pi|m|y)e^{2\pi imx}\sum_{\substack{d>0\\ d|(n,m)}}c_{nm/d^2}.$$

故定理的证明归结为证明下列等式

$$\sum_{\substack{d>0\\d|(n,m)}} c_{nm/d^2} = c_n c_m.$$

为此我们用§8定理中的等式

$$T(n)T(|m|) = \sum_{\substack{d>0\\d|(n,m)}} T\left(\frac{n|m|}{d^2}\right).$$

将其两边分别作用到 $E(z,s)$的 Fourier 展开式中不依赖于 x 的项上，得到

$$\begin{aligned}T(n)T(|m|)&(\xi(s)y^s + \xi(1-s)y^{1-s})\\&= \sum_{\substack{d>0\\d|(n,m)}} T\left(\frac{n|m|}{d^2}\right)(\xi(s)y^s + \xi(1-s)y^{1-s}).\end{aligned}$$

由前述讨论我们知道

$$T(n)(\xi(s)y^s + \xi(1-s)y^{1-s}) = c_n(\xi(s)y^s + \xi(1-s)y^{1-s}),$$

因此

$$c_n c_{|m|} = \sum_{\substack{d>0\\d|(n,m)}} c_{n|m|/d^2}.$$

最后由于 c_m 不依赖于 m 的正负号，我们就得到所需的等式.

§15 Hecke 算子的对角化

§14 定理 2 指出每一个 Eisenstein 级数都同时是所有 Hecke 算子的特征函数，这也就是说，Eisenstein 级数所生成的空间可以被分解为一维子空间的直积，其中每一个一维子空间都在所有 $T(n)$作用下不变. 在这一节我们要证明此结论对 Maass 尖点形式所成的空间也成立.

引理 设 M 是一些两两可交换的 Hermit 矩阵所组成的集合，即对任意 $H_1,H_2\in M$ 有 $H_1H_2=H_2H_1$，则存在一酉矩阵 U 使得 ${}^t\overline{U}HU=U^{-1}HU$ 对所有 M 中的 H 都是对角矩阵.

证明 首先我们可以只对有限个矩阵 $H_1,\cdots,H_r$ 进行证明，这是因为 M 中只有有限个线性无关的 Hermit 矩阵. 我们对 r 用

归纳法. $r=1$ 的情况属于显然,设引理对 $r-1$ 个矩阵 $H_1,\cdots,H_{r-1}$成立. 由于酉矩阵构成一个群且 ${}^t\overline{U}HU$ 亦为 Hermit 矩阵,我们可设 $H_1,\cdots,H_{r-1}$为对角矩阵. 我们进而可以看出对任意实数 $x_1,\cdots,x_{r-1}$,矩阵 $H=\sum\limits_{1\leqslant k<r} x_kH_k$ 均可写成

$$H=\begin{pmatrix} l_1I_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l_tI_{k_t} \end{pmatrix},$$

其中 I_{k_i}为 k_i 阶单位矩阵,l_i 为 $x_1,\cdots,x_{r-1}$的线性形式,且任意相邻两个 l_i,l_{i+1}互不相同. 由于 H_r 与 $H_1,\cdots,H_{r-1}$都可交换乘法,我们有 $HH_r=H_rH$ 对所有实数 $x_1,\cdots,x_{r-1}$成立. 因此 H_r 必可写成以下形式

$$H_r=\begin{pmatrix} A_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{k_t} \end{pmatrix},$$

其中 A_{k_i}为 k_i 阶 Hermit 矩阵. 我们可取酉矩阵 U_i 使得 ${}^t\overline{U}_iA_{k_i}U_i$ $(i=1,\cdots,t)$ 为对角矩阵. 定义

$$U=\begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_t \end{pmatrix}.$$

则酉矩阵 U 将 $H_1,\cdots,H_r$ 同时化成对角矩阵.

定理 存在由 Maass 尖点形式组成的标准正交系,其中每一个尖点形式都是所有 Hecke 算子 $T(n)$ $(n=1,2,\cdots)$的特征函数.

证明 设 N_λ 为所有在 Laplace 算子作用下特征值为 λ 的 Maass 尖点形式所生成的空间. 显然 N_λ 在 Laplace 算子作用下不变,根据 § 4 的谱分解结果,我们又知道 N_λ 或者为零空间,或者为有限维非零空间. 由于 Laplace 算子与 Hecke 算子交换,N_λ 也在所有 Hecke 算子 $T(n)$的作用下不变. 我们在 N_λ 中取一组标准正

交基，则每一个 Hecke 算子 $T(n)$ 在这组基下的矩阵都是 Hermit 矩阵. 由于 Hecke 算子两两交换（见 § 8），这些 Hermit 矩阵亦两两交换. 根据上面的引理，存在一个酉矩阵 U 使得对所有的这些 Hermit 矩阵 H，${}^t\overline{U}HU$ 都为对角矩阵. 这也就是说，我们可以用 U 得到一个新的 N_λ 的标准正交基，在其上每一个 $T(n)$ 都是对角矩阵. 于是这个标准正交基中的每一个 Maass 尖点形式就是所有 $T(n)$ 的特征函数.

由于 $T(n)$ 是一个 Hermit 算子，它的所有特征值都是实数. 我们按 Laplace 算子的离散谱 $0=\lambda_0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$ 的顺序将所有 N_λ 中的标准正交基中的 Maass 尖点形式记作 $\psi_j(z)$，而将 $\psi_j(z)$ 在 $T(n)$ 下的实特征值记作 $\mu_j(n)$：

$$(T(n)\psi_j)(z) = \mu_j(n)\psi_j(z).$$

我们要指出 $T(n)$ 的这些特征值 $\mu_j(n)$ 除了一个常数系数外与 $\psi_j(z)$ 的 Fourier 系数 $c_j(n)$ 相等. 事实上，由于

$$\psi_j(z) = \sum_{m\neq 0} c_j(m)\sqrt{y}K_{iv}(2\pi|m|y)e^{2\pi imx}$$

是 $T(n)$ 的特征函数，我们知道

$$(T(n)\psi_j)(z) = \sum_{m\neq 0}\mu_j(n)c_j(m)\sqrt{y}K_{iv}(2\pi|m|y)e^{2\pi imx}.$$

而根据 § 14 定理 1 又有

$$(T(n)\psi_j)(z) = \sum_{m\neq 0}\Bigg(\sum_{\substack{d>0\\ d|(n,m)}} c_j(nm/d^2)\Bigg)\sqrt{y}K_{iv}(2\pi|m|y)e^{2\pi imx},$$

故

$$\mu_j(n)c_j(m) = \sum_{\substack{d>0\\ d|(n,m)}} c_j\left(\frac{nm}{d^2}\right).$$

如果我们特别取 $m=1$，则

$$\mu_j(n)c_j(1) = c_j(n), \quad n = 1,2,\cdots.$$

从这个等式我们首先得出 $c_j(1)\neq 0$ 对所有 j 成立，否则我们必然有 $c_j(n)=\overline{c_j(-n)}=0$ $(n=1,2,\cdots)$；这是不可能的（因为 ψ_j

不恒等于零). 为了完成定理的证明,我们取 Laplace 算子的两个不同的特征值 λ_1 与 λ_2,又在 N_{λ_1} 与 N_{λ_2} 标准正交基中各取一个尖点形式 $f_1\in N_{\lambda_1}$ 与 $f_2\in N_{\lambda_2}$. 由于 f_1 与 f_2 的各项 Fourier 系数不能相差同一倍数,我们可找到一个正整数 n 使得 f_1 与 f_2 在 $T(n)$ 下的特征值 $\mu_1(n)$ 与 $\mu_2(n)$ 不同. 由于

$$(T(n)f_1,f_2) = (f_1,T(n)f_2),$$

故

$$\mu_1(n)(f_1,f_2) = \mu_2(n)(f_1,f_2).$$

从 $\mu_1(n)\neq\mu_2(n)$ 我们得出 f_1 与 f_2 正交. 这就最后证明了定理的结论:$\{\psi_j\}$ 是一标准正交系,其中每一个 ψ_j 都是所有 Hecke 算子的特征函数.

从定理的上述证明中我们还可得出 ψ_j 的 Fourier 系数所满足的一个恒等式. 事实上,我们知道

$$\mu_j(n) = \frac{c_j(n)}{c_j(1)},$$

故

$$c_j(n)c_j(m) = c_j(1)\sum_{\substack{d>0\\ d|(n,m)}} c_j\left(\frac{nm}{d^2}\right).$$

只要一个尖点形式同时又是所有 Hecke 算子的特征函数,上面的关系即成立. 在 Eisenstein 级数的情况下,类似的关系在 §14 定理 2 的证明中已经得出. 我们称这种性质为 Fourier 系数的**积性**,其来源于 Hecke 算子的积性(见 §14 定理).

§16　尖点形式 Fourier 系数的估计

在 §15 中我们证明了在空间 $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中存在由 Maass 尖点形式组成的标准正交系,其中每一个尖点形式都是所有 Hecke 算子 $T(n)$ 的特征函数,从而其 Fourier 系数 $c(n)$ 满足等式

$$c(n)c(m)=c(1)\sum_{\substack{d>0\\ d|(n,m)}}c\left(\frac{nm}{d^2}\right).$$

如果不要求这个正交系是标准的，而对其中每一个尖点形式设 $c(1)=1$，则我们得到 $L^2_{\text{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 的一个正交系 $\{f_j\}$，其中每一个尖点形式 $f_j(z)$ 的 Fourier 系数 $c_j(n)$ 都满足条件

$$c_j(n)c_j(m)=\sum_{\substack{d>0\\ d|(n,m)}}c_j\left(\frac{nm}{d^2}\right).$$

特别我们看出，$c_j(n)$ 是 n 的积性函数.

对于每一个这样的尖点形式 $f_j(z)$ 我们定义一个 Dirichlet 级数

$$\varphi_j(s)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{c_j(n)}{n^s}.$$

为了研究这个 Dirichlet 级数的收敛性，我们需要对 Fourier 系数 $c_j(n)$ 进行估计. 对此有关于非解析 Maass 形式的 Ramanujan-Petersson 猜想：

猜想 对于上述 $L^2_{\text{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 的正交系 $\{f_j\}$ 中的任意一个 Maass 尖点形式

$$f_j(z)=\sum_{n\neq 0}c_j(n)\sqrt{y}K_{iv}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx},\quad c_j(1)=1,$$

其 Fourier 系数 $c_j(n)$ 满足：对任意 $\varepsilon>0$，

$$c_j(n)=O(n^{\varepsilon}),$$

其中 O 中的常数最多依赖于 ε 与 j.

在这里我们要说明的是对于权为 k 的解析尖点形式，如果其 Fourier 级数展开式为

$$f(z)=\sum_{n\neq 0}a(n)e^{2\pi inz},$$

则其所对应的 Ramanujan-Petersson 猜想为

$$a(n)=O(n^{(k-1)/2+\varepsilon}).$$

特别来说，对于 Ramanujan 函数，

$$e^{2\pi i z}\prod_{n\geqslant 1}(1-e^{2\pi i n z})^{24}=\sum_{n\geqslant 1}\tau(n)e^{2\pi i n z},$$

上述猜想为

$$\tau(n)=O(n^{11/2+\varepsilon}).$$

这个关于解析尖点形式的 Ramanujan-Petersson 猜想已经被 Deligne[11]用代数几何方法于 1974 年证明了.

但是对于我们的关于非解析 Ramanujan-Petersson 猜想，Deligne 的方法已经无能为力. Bruggemau[12]与 Kuznetsov[7]证明了

$$c_j(n)=O(n^{\frac{1}{4}+\varepsilon}),$$

其证明我们后面还要叙述. 这方面最好的结果是 Kim 与 Shahidi 得出的

$$c_j(n)=O(n^{\frac{1}{9}+\varepsilon}).$$

对于 $c_j(n)$的最简单的上界为 Hecke 上界

$$c_j(n)=O(n^{1+\varepsilon}).$$

其证明思路是对于 $n=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ 将 $c_j(n)$表为 $c_j(p_1^{a_1})\cdots c_j(p_r^{a_r})$，由于

$$\begin{aligned}c_j(p^a)=\mu_j(p^a)&=\sum_{0\leqslant k\leqslant a/2}\frac{(-1)^k(a-k)!}{k!(a-2k)!}(\mu_j(p))^{a-2k}\\&=O(\mu_j(p)^{a+\varepsilon}),\end{aligned}$$

Hecke 上界可由 $\mu_j(p)\leqslant p+1$ 得出.

由这个 Hecke 上界我们可知 Dirichlet 级数 $\varphi_j(s)$在半平面 $\mathrm{Re}s>2$收敛. 我们进而可得到这个 Dirichlet 级数的 Euler 乘积.

定理 对于 $\mathrm{Re}\ s>2$，

$$\varphi_j(s)=\prod_p(1-c_j(p)p^{-s}+p^{-2s})^{-1}.$$

证明 根据

$$c_j(n)c_j(m)=\sum_{d\mid(n,m)}c_j\left(\frac{nm}{d^2}\right)$$

可知

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_j(p^k)}{p^{ks}}(1-c_j(p)p^{-s}+p^{-2s})=1.$$

事实上,上式左端等于

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{c_j(p^k)}{p^{ks}}-\sum_{k\geqslant 1}\frac{c_j(p)c_j(p^{k-1})}{p^{ks}}+\sum_{k\geqslant 2}\frac{c_j(p^{k-2})}{p^{ks}}.$$

由于

$$c_j(p)c_j(p^{k-1})=c_j(p^k)+c_j(p^{k-2}),$$

我们得到

$$c_j(1)+\frac{c_j(p)}{p^s}-\frac{c_j(p)c_j(1)}{p^s}=1.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_j(p^k)}{p^{ks}}=(1-c_j(p)p^{-s}+p^{-2s})^{-1}.$$

定理则可由

$$\prod_p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_j(p^k)}{p^{ks}}=\sum_{n>0}\frac{c_j(n)}{n^s}$$

推出.

§17 Hecke 算子在 Eisenstein 级数上的作用

我们已经得出了 Eisenstein 级数的 Fourier 展开式

$$E^*(z,s)=\xi(s)y^s+\xi(1-s)y^{1-s}$$
$$+2\sqrt{y}\sum_{n\neq 0}\tau_s(n)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx},$$

其中 $\xi(s)=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)$, $\tau_s(n)=|n|^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(n)$. §14 定理 2 又给出了 Hecke 算子在 Eisenstein 级数上的作用

$$T(n)E(z,s)=\tau_s(n)E(z,s).$$

与 Eisenstein 级数相对应的 Dirichlet 级数为

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\tau_s(n)}{n^r}.$$

由于对于 Re $s\geqslant 1/2$ 我们有 $|\tau_s(n)|\leqslant|n|^{\mathrm{Re}s-1/2}d(n)$. 故这个 Dirchlet 级数在半平面 $\mathrm{Re}r>\mathrm{Re}s+\frac{1}{2}$ 上收敛.

第二章 Selberg 迹公式

§1 不变算子

我们在第一章考虑过的非欧 Laplace 算子

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

在群 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$的作用下不变，即对于 $g\in\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$成立

$$\Delta(f(gz)) = (\Delta f)(gz).$$

满足这个性质的算子被称为**不变算子**. 除了不变**微分算子**以外我们还可以考虑积分算子. 一个**积分算子** L 定义为

$$(Lf)(z) = \int_{\mathfrak{H}} k(z,z')f(z')\mathrm{d}z',$$

其中 $k(z,z')$叫做**核函数**. 可以看出一个积分算子是不变算子，当且仅当其核函数满足条件

$$k(gz,gz') = k(z,z')$$

对所有 $g\in\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R}),z,z'\in\mathfrak{H}$ 成立.

反过来，我们称一个函数 $k(z,z')$为**点耦不变式**，如果对于任意 $g\in\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R}),z,z'\in\mathfrak{H}$ 成立 $k(gz,gz')=k(z,z')$. 从一个点耦不变式我们可得到一个**不变积分算子**，定义如上，有时也简称为**不变算子**. 设 $K=\mathrm{SO}(2,\boldsymbol{R})=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\middle|\theta\in\boldsymbol{R}\right\}$，则 K 为 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$的最大紧致子群.

通过映射 $g\mapsto gi\in\mathfrak{H}$，我们可把 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})/K$ 等同于上半平面 $\mathfrak{H}$. 故每一个 $\mathfrak{H}$ 上的函数 $f(z)$都可看成 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$上在 K 的右作用下不变的函数. 特别对于点耦不变式来说，$k(z,z'),z,z'\in\mathfrak{H}$，可以

被表示为 $k(g,g')$，$g,g'\in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$. 由于 $k(gz,gz')=k(z,z')$，我们可知存在一个 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ 上的函数 $F(g)$ 使得 $k(g,g')=F(g'^{-1}g)$. 因此 $k(z,z')$所定义的不变积分算子可以表达为

$$(Lf)(z)=\int_{\mathfrak{H}}k(z,z')f(z')\mathrm{d}z'=\int_{\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})}f(g')F(g'^{-1}g)\mathrm{d}g'$$

$$=\int_{\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})}f(gg')F(g'^{-1})\mathrm{d}g'=f*F,$$

即 f 与 F 的卷积，这里 $\mathrm{d}g'$是 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$上的 Haar 测度，通过正规化使 K 的体积为 1.

由于 $k(g\sigma,g'\sigma')=k(g,g')$对所有 $g,g'\in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$与 $\sigma,\sigma'\in K$ 成立，我们得知 $F(\sigma^{-1}g\sigma)=F(g)$，即 F 在每一个双陪集 KgK 上均为常数. 由 Cartan 分解我们知道 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$可表示为下列不相交并集：

$$\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})=\bigcup_{a\geqslant 1}K\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1/a\end{pmatrix}K,$$

故函数 $F(g)$由其在$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1/a\end{pmatrix}$上的值惟一确定，$a\geqslant 1$. 特别，我们由 $KgK=Kg^{-1}K$ 看出 $F(g)=F(g^{-1})$.

定理(**Selberg**[22]) 任意两个 $\mathfrak{H}$ 上的不变算子 L 与 L'互相交换.

证明 我们先取任意一个点耦不变式 $k(z,z')$，并将其看做 z 的函数来对此证明 $L_zL'_zk=L'_zL_zk$，这里 L_z 与 L'_z 中的下标 z 表示不变算子 L 与 L'作用于 $k(z,z')$的第一个变量上. 记

$$L_zk(z,z')=k'(z,z'),$$

则 $k'(z,z')$亦为一个点耦不变式：

$$k'(zg,z'g)=(L_zk)(zg,z'g)=L_z(k(zg,z'g))$$

$$=L_z(k(z,z'))=k'(z,z').$$

因此如果将 $k(z,z')$写成 $F(g'^{-1}g)$，则 $L_g(F(g'^{-1}g))=(LF)(g'^{-1}g)$亦代表一个点耦不变式. 故$(LF)(g)=(LF)(g^{-1})$及

$$L_g(F(g'^{-1}g)) = (LF)(g'^{-1}g) = (LF)(g^{-1}g')$$
$$= L_{g'}(F(g^{-1}g')) = L_{g'}(F(g'^{-1}g)).$$
由此我们可以看出
$$L_z k(z,z') = L_{z'} k(z,z').$$
因作用于不同变量的积分算子可交换，我们得出
$$L'_z L_z k = L'_z L_{z'} k = L_{z'} L'_z k = L_z L'_z k.$$
对于一般的函数 $f(z)$ 我们定义一个新函数
$$f_{z_0}(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\sigma_0^{-1}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\sigma_0 z\right)\mathrm{d}\theta,$$
其中 $\sigma_0\in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ 为满足 $\sigma_0 z_0=\mathrm{i}$ 的某一个矩阵. 更确切地说，积分式中的 σ_0^{-1} 由 f_{z_0} 中的下标 z_0 决定，而第二个 σ_0 由 f_{z_0} 的第二个变量决定. 换句话说我们定义
$$f_{z_0}(z,z') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\sigma_0^{-1}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\sigma' z\right)\mathrm{d}\theta,$$
其中 $\sigma_0 z_0=\mathrm{i}$，$\sigma' z'=\mathrm{i}$，则 $f_{z_0}(z,z')$ 是一个点耦不变式. 故由上面所证之特殊情况，
$$L'_z L_z(f_{z_0}(z,z')) = L_z L'_z(f_{z_0}(z,z')).$$
取 $z'=z_0$，则得出
$$L'_z L_z M_{z_0} f(z) = L_z L'_z M_{z_0} f(z),$$
这里 $M_{z_0}f(z)$ 即为上面所定义的 $f_{z_0}(z,z_0)$. 由于 L_z 与 L'_z 均为不变算子，从 $M_{z_0}f(z)$ 的定义可知
$$M_{z_0} L'_z L_z f(z) = M_{z_0} L_z L'_z f(z).$$
取 $z_0=z$，我们最终得出
$$L'_z L_z f(z) = L_z L'_z f(z).$$
证毕.

§2 微分算子与积分算子

§1 中定义的算子 M_{z_0} 被称为**中值算子**:

$$M_{z_0}f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\sigma_0^{-1}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\sigma_0 z\right)\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\sigma_0 z_0=\mathrm{i}$. 以中值算子 M_i 作用到函数

$$y^s=(\mathrm{Im}\ z)^s$$

上,我们得到函数

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}z\right)\right)^s\mathrm{d}\theta.$$

由于 y^s 是 Laplace 算子 Δ 的特征函数,特征值为 $s(1-s)$,$\omega(z)$ 也是 Δ 的特征函数,特征值亦为 $s(1-s)$. 若将 $\omega(z)$ 写成 $\omega(g)$,则我们得到一个在每一个双陪集 KgK 上均为常数的函数.

中值算子也可作用在任意的线性算子 L 上. 令 T_g 为线性算子 $f(z)\mapsto f(gz)$,其中 $g\in\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$,则定义

$$M_{z_0}(L)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}T_gLT_g^{-1}\mathrm{d}\theta,$$

其中 $g=\sigma_0^{-1}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\sigma_0$ 且 $\sigma_0 z_0=\mathrm{i}$. 一个线性算子为不变算子当且仅当它与所有 T_g 可交换.

设 L 为一个不变微分算子,则 $M_{z_0}(L)=L$. 对于 $z_0=\mathrm{i}$ 来说,这等价于

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}T_{k(\theta)}LT_{k(\theta)}^{-1}\mathrm{d}\theta=L,\quad 其中\ k(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

如果 L 的阶数为 1,则可见上式不可能成立. 故不存在一阶不变微分算子. 由于任意一个二元多项式,如果其在所有正交变换下不变,它必然是 X^2+Y^2 的一个多项式,我们得出

$$\Delta=-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

是 $\mathfrak{H}$ 上最小阶数的不变微分算子,而且任何不变微分算子均是 Δ 的多项式.

一个定义在 $\mathfrak{H}$ 上的函数 $f(z)$ 如果满足下列条件,则被称做**球带函数**:

(1) $f(\mathrm{i})=1$;

(2) $f(k(\theta)z)=f(z)$，其中 $k(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，$\theta\in\boldsymbol{R}$；

(3) $\Delta f=\lambda f$.

我们前面构造的函数 $\omega(z)$就是这样一个球带函数. 不难看出球带函数 $f(z)$由 λ 的值惟一决定. 事实上，由于 $f(z)$是实解析的，它可由当 L 取遍所有微分算子时 Lf 在 i 点的值惟一确定. 而如果我们只考虑 Lf 在 i 点的值，则 $T_{k(\theta)}LT_{k(\theta)}^{-1}f=LT_{k(\theta)}^{-1}f$. 因为 $f(z)$是一个球带函数，$T_{k(\theta)}^{-1}f=f$，故在 i 这一点上成立 $T_{k(\theta)}LT_{k(\theta)}^{-1}f=Lf$. 故对于任意一个微分算子 L，我们可只考虑 L_0f 在 i 点的值，这里 $L_0=M_{\mathrm{i}}(L)$为 L 在中值算子 M_{i} 作用下的像. 又由于对于任意如此的 L_0 可找到一个不变算子 L'使得 L_0f 与 $L'f$ 在 i 这一点的值相同，我们的函数 $f(z)$就可由当 L'取遍所有不变微分算子时 $L'f$ 在 i 这一点的值所惟一确定. 由于任意不变微分算子都可表示为非欧 Laplace 算子 Δ 的多项式 $p(\Delta)$，我们得知$(L'f)(\mathrm{i})=p(\lambda)f(\mathrm{i})=p(\lambda)$. 因此球带函数 $f(z)$由其所对应的特征值 λ 所惟一确定.

下面我们可以考虑不变微分算子与不变积分算子的特征函数之间的关系.

定理 1 设 $f(z)$为在上半平面 $\mathfrak{H}$ 上定义的非欧 Laplace 算子 Δ 的特征函数，特征值为 λ：$\Delta f=\lambda f$. 对于任意不变算子 L，存在一个仅与 L 与 λ 相关而与 $f(z)$无关的常数 $\Lambda_L(\lambda)$，使得

$$Lf=\Lambda_L(\lambda)f.$$

证明 取复数 s 使得 $s(1-s)=\lambda$ 并定义 $\omega(z,z')=\omega(g'^{-1}g)$，则 $\omega(z,z')$是一个点耦不变式. 因此 $\omega(z,z')$作为 z 的函数，对 z' 在 $SL(2,\boldsymbol{R})$中的稳定化子 K'的作用下不变，并且 $\Delta\omega=\lambda\omega$，故 $\omega(z,\mathrm{i})$差一个常数因子外是一个球带函数. 由于不变算子之间互相交换，函数 $\omega_1(z)=L_z\omega(z,z')$也满足 $\Delta\omega_1=\lambda\omega_1$，并且 $\omega_1(z)$在 K' 作用下不变. 因此 $L_z\omega(z,\mathrm{i})$差一个常数系数也代表一个球带函数. 根据球带函数对于特征值 λ 的惟一性，以上的两个球带函数之间

满足关系 $L_z\omega(z,\mathrm{i})=\Lambda_L(\lambda)\omega(z,\mathrm{i})$. 因此

$$L_z\omega(z,z') = \Lambda_L(\lambda)\omega(z,z'),$$

其中常数系数 $\Lambda_L(\lambda)$仅依赖于 L 与 λ.

我们进而考虑 Δ 的任意一个特征函数 $f(z)$: $\Delta f=\lambda f$. 由于 $M_{z'}f(z)$是一个点耦不变式,我们有 $L_zM_{z'}f(z)=\Lambda_L(\lambda)M_{z'}f(z)$, 故 $M_{z'}Lf(z)=M_{z'}(\Lambda_L(\lambda)f(z))$. 取 $z'=z$,我们证明出

$$Lf(z) = \Lambda_L(\lambda)f(z).$$

证毕.

定理 2 我们考虑所有这样的点耦不变式 $k(z,z')$: 其通过 $k(g,g')=F(g'^{-1}g)$所定义的函数 $F(g)$为无穷次可微并有紧支集. 如果一个 $\mathfrak{H}$ 上定义的函数 $f(z)$是所有这些 $k(z,z')$所对应的不变积分算子的特征函数,则 $f(z)$也是 $\mathfrak{H}$ 上非欧 Laplace 算子的特征函数.

证明 设 $k(z,z')$为满足定理条件的一个点耦不变式,并设在下式

$$\int_{\mathfrak{H}} k(z,z')f(z')\mathrm{d}z' = \Lambda f(z)$$

中特征值 Λ 不等于零. 我们恒能找到这样一个 $k(z,z')$,除非 $f(z)$ 几乎处处为零. 由于 $F(g)$无穷次可微,我们进而可取以上这样的一个 $k(z,z')$,使得 $\Delta_z k(z,z')=k_1(z,z')$存在. 由于 $k_1(z,z')$也是一个点耦不变式,并同样满足定理中的条件,我们得到

$$\int_{\mathfrak{H}} k_1(z,z')f(z')\mathrm{d}z' = \Lambda_1 f(z).$$

但上式左边等于

$$\int_{\mathfrak{H}} \Delta_z k(z,z')f(z')\mathrm{d}z' = \Delta\int_{\mathfrak{H}} k(z,z')f(z')\mathrm{d}z' = \Lambda\Delta f(z),$$

这里我们可以将微分算子与积分号互换是因为 $F(g)$有紧支集. 由于 $\Lambda\neq 0$,我们最终得到

$$\Delta f = \Lambda_1\Lambda^{-1}f.$$

证毕.

§ 3 Selberg 变换

由 § 2 可知如果对于 $\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ 有 $\Delta f=\lambda f$，则

$$\int_{\mathfrak{H}} k(z,z')f(z')\mathrm{d}z' = \Lambda_k(\lambda)f(z),$$

这里积分算子的特征值 $\Lambda_k(\lambda)$依赖于 $k(z,z')$与 λ，而且从 k 到 Λ_k 是一个线性变换. Selberg 给出了这个线性变换的具体形式，但未给出证明. 在这一节中我们按照 Kubota[5]的思路给以介绍.

对于上半平面 $\mathfrak{H}$ 中的两个点 z 与 z'，它们之间的非欧距离为

$$d(z,z') = \frac{1}{2}\log\frac{|\bar{z}-z'|+|z-z'|}{|\bar{z}-z'|-|z-z'|}.$$

在群 SL(2,$\boldsymbol{R}$)的作用下，$d(z,z')$是两点的惟一不变量. 因此任意一个点耦不变式 $k(z,z')$均可表为 $d(z,z')$的函数. 特别地，如果我们取点耦不变式

$$t(z,z') = \frac{|z-z'|^2}{\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')},$$

则

$$t(z,z') = \mathrm{e}^{2d(z,z')} + \mathrm{e}^{-2d(z,z')} - 2$$

(由此我们证明了 $t(z,z')$确为点耦不变式). 反之

$$d(z,z') = \frac{1}{2}\log\frac{t+2+\sqrt{t^2+4t}}{2}.$$

因此我们可取一个定义在正实数上的函数 $k(t)$ 使得 $k(z,z')=k(t(z,z'))$.

另一方面我们设 $\lambda=s(1-s)=\frac{1}{4}+r^2$ 并且定义一个复变数函数 $h(r)$如下：

$$\Lambda_k(\lambda) = h(r).$$

由此我们得到一个从 $k(t)$到 $h(r)$的线性变换，这就是 Selberg 变换. Selberg 变换的具体公式由下面定理给出.

定理1 设 $k(t)$为定义在正实数上的函数，又设

$$Q(w)=\int_w^{\infty}\frac{k(t)}{\sqrt{t-w}}\mathrm{d}t;$$

定义 $g(u)$如下

$$g(u)=Q(w),\quad w=\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}-2,$$

则

$$h(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)\mathrm{e}^{iur}\mathrm{d}u$$

为 $k(t)$的 Selberg 变换. Selberg 逆变换由

$$g(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)\mathrm{e}^{-iur}\mathrm{d}r$$

及

$$k(t)=-\frac{1}{\pi}\int_t^{+\infty}\frac{\mathrm{d}Q(w)}{\sqrt{w-t}}$$

给出.

证明(Kubota[5]) 函数 $k(t)$与 $h(r)$之间的关系为

$$\int_{\mathfrak{H}}k(t(z,z'))f(z')\mathrm{d}z'=h(r)f(z).$$

取 $f(z)=y^s$,则有

$$\int_{\mathfrak{H}}k\left(\frac{|z-z'|^2}{yy'}\right)y'^s\mathrm{d}z'=h(r)y^s,$$

其中 $y=\mathrm{Im}\ z,y'=\mathrm{Im}\ z'$. 记 $x=\mathrm{Re}\ z,x'=\mathrm{Re}\ z'$,则

$$\frac{|z-z'|^2}{yy'}=\frac{y'}{y}+\frac{y}{y'}-2+\frac{(x-x')^2}{yy'}.$$

作变量替换

$$w=\frac{y'}{y}+\frac{y}{y'}-2,\quad t=w+\frac{(x-x')^2}{yy'},$$

我们得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}k\left(w+\frac{(x-x')^2}{yy'}\right)\mathrm{d}x'=2\int_x^{\infty}k\left(w+\frac{(x-x')^2}{yy'}\right)\mathrm{d}x'$$

$$=\int_w^{\infty}k(t)\frac{yy'}{x-x'}\mathrm{d}t=\sqrt{yy'}\int_w^{\infty}\frac{k(t)}{\sqrt{t-w}}\mathrm{d}t.$$

故

$$\int_{\mathfrak{H}} k\left(\frac{|z-z'|^2}{yy'}\right) y'^s \mathrm{d}z' = \int_0^\infty y'^{s-2}\mathrm{d}y' \int_{-\infty}^{\infty} k\left(w + \frac{(x-x')^2}{yy'}\right)\mathrm{d}x'$$
$$= \int_0^\infty Q(w)\sqrt{yy'}\, y'^{s-2}\mathrm{d}y'.$$

设 $y'/y = \mathrm{e}^u$，则上式等于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u) y\mathrm{e}^{u/2} \cdot (y\mathrm{e}^u)^{s-2} \cdot y\mathrm{e}^u \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\mathrm{e}^{u(s-1/2)}\mathrm{d}u \cdot y^s$$
$$= y^s \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\mathrm{e}^{iur}\mathrm{d}u.$$

由此我们可推出定理的第一部分.

定理的第二部分第一式实为 Fourier 逆变换公式. 为证第二式我们用分部积分计算：

$$-\frac{1}{\pi}\int_u^\infty \sqrt{w-u}\,\mathrm{d}Q(w) = \frac{1}{\pi}\int_u^\infty Q(w)\mathrm{d}\sqrt{w-u}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_u^\infty\int_w^\infty \frac{k(t)}{\sqrt{w-u}\sqrt{t-w}}\mathrm{d}t\mathrm{d}w.$$

交换积分次序并对 w 积分，我们得到

$$-\frac{1}{\pi}\int_u^\infty \sqrt{w-u}\,\mathrm{d}Q(w) = \frac{1}{2}\int_u^\infty k(t)\mathrm{d}t.$$

等式两边对 u 取微分，则定理第二部分得证. 证毕.

利用 Selberg 变换公式，我们有以下结果.

定理 2 设 $k(z,z')$ 为一点耦不变式，令 $k(t)$ 为满足 $k(z,z') = k(t(z,z'))$ 的函数，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k\left(z, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z'\right)\mathrm{d}b = \sqrt{yy'}\, g(\log y - \log y'),$$

其中 $g(u)$ 为定理 1 中由 $k(t)$ 定义的函数.

证明(Kubota[5]) 等式左端等于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(z, b+z')\mathrm{d}b = 2\int_0^{+\infty} k\left(\frac{(y-y')^2+x^2}{yy'}\right)\mathrm{d}x.$$

作变量替换 $t = x^2/(yy')$, $\mathrm{d}x = \sqrt{yy'}/(2\sqrt{t})\mathrm{d}t$，上式等号右边则

有

$$\sqrt{yy'}\int_0^{+\infty}k\left(\frac{(y-y')^2}{yy'}+t\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

又设

$$\begin{aligned}\frac{(y-y')^2}{yy'}&=\left(\sqrt{\frac{y}{y'}}-\sqrt{\frac{y'}{y}}\right)^2\\&=w=\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}-2=(\mathrm{e}^{u/2}-\mathrm{e}^{-u/2})^2,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}k(z,b+z')\mathrm{d}b&=\sqrt{yy'}\int_w^{\infty}\frac{k(t)}{\sqrt{t-w}}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{yy'}Q(w)=\sqrt{yy'}g(u)\\&=\sqrt{yy'}g(\log y-\log y').\end{aligned}$$

证毕.

§4 不变积分算子的谱分解

在第一章§10中我们曾推导出非欧 Laplace 算子的谱分解公式，但其证明仅对满足很强的解析条件的函数 $f(z)$ 成立. 下面的定理则没有那么强的限制. 首先我们指出，如果 $f(z)$ 为一波动形式，则

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{H}}k(z,z')f(z')\mathrm{d}z'&=\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\sum_{\gamma\in\Gamma}k(z,\gamma z')f(\gamma z')\mathrm{d}z'\\&=\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}K(z,z')f(z')\mathrm{d}z',\end{aligned}$$

其中 $K(z,z')=\sum_{\gamma\in\Gamma}k(z,\gamma z')$. 对此有

$$\left(\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}K(z,z')f_1(z')\mathrm{d}z',f_2\right)=\left(f_1,\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\overline{K}(z,z')f_2(z')\mathrm{d}z'\right).$$

定理 设 $k(z,z')=k(t(z,z'))$ 为一点耦不变式，$h(r)$ 为 $k(t)$ 的 Selberg 变换. 假定 $k(t)$ 为一个在正实数上无穷次可微且有紧

支集的函数.定义

$$\hat{H}(z,z') = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)E(z,s)E(z',\bar{s})\mathrm{d}r,$$

及

$$\hat{K}(z,z') = K(z,z') - \hat{H}(z,z'),$$

其中 $s=\frac{1}{2}+\mathrm{i}r$,则对于任意尖点形式 $f(z)$ 有

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{H}(z,z')f(z')\mathrm{d}z' = 0,$$

且 $\hat{K}(z,z')$ 是 z 与 z' 在基本区域 D 上的一个有界函数.

证明 首先我们指出 $\hat{H}(z,z')$ 定义中的积分收敛.根据定理中对 $k(t)$ 的假设,$Q(w)$ 对足够大的 w 均等于零,故 $g(u)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的一个无穷次可微且有紧支集的函数,由此推得其 Fourier 变换 $h(r)$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上的一个 Schwartz 函数.另一方面 Eisenstein 级数 $E(z,s)$ 当 $s=\frac{1}{2}+\mathrm{i}r$ 时是 r 的一个多项式增长函数,这一点可从 $E(z,s)$ 的 Fourier 展开式中看出.事实上由于 $|K_{\mathrm{i}r}(2\pi|n|y)|<\mathrm{e}^{-\pi|n|y}K_0(2)$,$E(z,s)$ 的非常数项部分对 r 有界,而常数项则对 r 为多项式增长.由此可知 $\hat{H}(z,z')$ 的定义中的积分收敛.

对于任意尖点形式 $f(z)$,由其 Fourier 展开式,可知对于任意的 $a\in\boldsymbol{R}$,式子 $y^a|f(z)|$ 均当 $y\to+\infty$ 时趋向于零.故根据第一章 §10 的计算,

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} E(z',\bar{s})f(z')\mathrm{d}z'$$

收敛并等于

$$\int_0^{\infty}\int_0^1 f(z)y^s\,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} = \int_0^{\infty} y^s\,\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\int_0^1 f(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}x = 0.$$

故对

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{H}(z,z')f(z')\mathrm{d}z'$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)E(z,s)E(z',\bar{s})f(z')dr$$

中右边的积分进行交换，可证得其等于零.

我们进而证明 $\hat{K}(z,z')$ 是 z 与 z' 的一个有界函数. 根据 Eisenstein 级数的 Fourier 展开式，

$$E^*(z,s) = \xi(s)y^s + \xi(1-s)y^{1-s}$$
$$+ 2\sqrt{y}\sum_{n\neq 0}|n|^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(|n|)K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx},$$

我们知道其常数项 $\xi(s)y^s+\xi(1-s)y^{1-s}$ 后面的级数是 y 趋向于 ∞ 时的一个速降函数. 记这后面的级数为 $\widetilde{E}(z,s)$，则有

$$E(z,s)E(z',\bar{s}) = \left(y^s + \frac{\xi(1-s)}{\xi(s)}y^{1-s} + \widetilde{E}(z,s)\right)$$
$$\times\left(y'^{\bar{s}} + \frac{\xi(1-\bar{s})}{\xi(\bar{s})}y'^{1-\bar{s}} + \widetilde{E}(z',\bar{s})\right).$$

注意对于 $s=\frac{1}{2}+\mathrm{i}r$ 有

$$\frac{\xi(1-s)}{\xi(s)}\cdot\frac{\xi(1-\bar{s})}{\xi(\bar{s})} = 1,$$

故

$$E(z,s)E(z',\bar{s})$$
$$= y^{1/2}y'^{1/2}\left(\left(\frac{y}{y'}\right)^{\mathrm{i}r} + \left(\frac{y'}{y}\right)^{\mathrm{i}r}\right)$$
$$+ \frac{\xi(1-s)}{\xi(s)}(yy')^{\frac{1}{2}-\mathrm{i}r} + \frac{\xi(1-\bar{s})}{\xi(\bar{s})}(yy')^{\frac{1}{2}+\mathrm{i}r}$$
$$+ \widetilde{E}(z,s)\left(y'^{\bar{s}} + \frac{\xi(1-\bar{s})}{\xi(\bar{s})}y'^{1-\bar{s}}\right)$$
$$+ \widetilde{E}(z',\bar{s})\left(y^s + \frac{\xi(1-s)}{\xi(s)}y^{1-s}\right) + \widetilde{E}(z,s)\widetilde{E}(z',\bar{s}).$$

为了证明 $\hat{K}(z,z')$ 是 z 与 z' 的有界函数，我们只需考虑两种情况：

(1) z' 在基本区域 D 中有界但 y 趋于 ∞，以及

(2) y 与 y' 均趋于 ∞.

在(1)的情况下，上式右端第三行的乘积当 y 趋于 ∞ 时趋于

0，而第四行与第二行的项乘上 $h(r)$ 对 r 积分后亦趋向于零，例如由于 $yy'\to\infty$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}r\right)}{\xi\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}(yy')^{\frac{1}{2}-\mathrm{i}r}\mathrm{d}r\to 0$$

为 Fourier 变换的一个基本性质.

在(2)的情况下，第三、四两行均趋于 0，而第二行两项乘 $h(r)$ 后的积分亦趋于 0. 我们现在所剩下的就是积分

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)y^{1/2}y'^{1/2}\left(\left(\frac{y}{y'}\right)^{\mathrm{i}r}+\left(\frac{y'}{y}\right)^{\mathrm{i}r}\right)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sqrt{yy'}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}r(\log y-\log y')}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r(\log y-\log y')})\mathrm{d}r.$$

由于 $g(u)$ 是一偶函数，可知 $h(r)$ 亦为偶函数，则我们可将上式写成：

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{yy'}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}r(\log y-\log y')}\mathrm{d}r=\sqrt{yy'}\,g(\log y-\log y').$$

以上的结果说明 $\hat{H}(z,z')$ 等于 $\sqrt{yy'}\,g(\log y-\log y')$ 加上一个 z 与 z' 的有界函数. 特别由于 $g(u)$ 是一个在 $\boldsymbol{R}$ 上无穷次可微且具有紧支集的函数，$\hat{H}(z,z')$ 当只有一个 z 或 z' 趋向于 ∞ 时仍为有界函数.

我们转而讨论 $K(z,z')$，$z,z'\in D$. 由于 $k(t)$ 有紧支集，当只有一个 y 或 y' 趋向于 $+\infty$ 时 $K(z,z')$ 有界. 事实上，如果 z' 在基本区域 D 中保持 $y'\leqslant N$，则所有的 $\gamma z'(\gamma\in\Gamma)$ 都包含在上半平面的带形区域虚部 $\leqslant N$ 之中. 如果这时 $y\to+\infty$，则 z 与上述带形区域的非欧距离趋于无穷，故 z 与所有 $\gamma z'$ 之间的非欧距离亦一致趋向无穷. 由于 $k(t)$ 有紧支集，可知当 y 充分大时所有 $k(z,\gamma z')$ 均等于零，故 $K(z,z')$ 亦为零.

当 $z,z'\in D$ 而 y,y' 同时趋向 $+\infty$ 时，对所有 $\gamma\notin\Gamma_\infty$，$\gamma z'$ 均包含于带形区域虚部 $\leqslant 1$ 之中. 故当 $z\in D$ 而 $y\to+\infty$ 时，z 与这些

$\gamma z'$ ($\gamma \notin \Gamma_\infty$)的非欧距离一致趋于无穷. 因此对充分大的 y,所有 $k(z,\gamma z')$ ($\gamma \notin \Gamma_\infty$)均为零,且 $\sum_{\gamma \notin \Gamma_\infty} k(z,\gamma z')$亦为零. 最后当 $\gamma \in \Gamma_\infty$, $z, z' \in D, y, y' \to +\infty$时,$z$ 与 $\gamma z'$之间的非欧距离可能保持有限,因此 $K(z,z')$等于$\sum_{\gamma \in \Gamma_\infty} k(z,\gamma z') = \sum_{b \in \mathbf{Z}} k\left(z, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z'\right)$加上一个有界函数. 根据上节最后的定理 2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k\left(z, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z'\right) \mathrm{d}b = \sqrt{yy'}\, g(\log y - \log y').$$

从 $k(t)$为无穷次可微且有紧支集的函数的假设,可知其导数有界,故级数

$$\sum_{b \in \mathbf{Z}} k\left(z, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z'\right)$$

等于$\sqrt{yy'}\, g(\log y - \log y')$加上一个 z 与 z'的有界函数.

综合上面关于$\hat{H}(z,z')$与 $K(z,z')$的计算,我们推出$\hat{K}(z,z')$为 z 与 z'的一个有界函数. 证毕.

这个定理把一个不变积分算子的核函数 $K(z,z')$分成两部分,即$\hat{H}(z,z')$与$\hat{K}(z,z')$,其中$\hat{H}(z,z')$可用 Eisenstein 级数明显地表示出来,而$\hat{K}(z,z')$为 $K(z,z')$的有界部分. 由这个核函数的分解式我们即得出其积分算子的谱分解,连续谱部分的谱分解由 Eisenstein 级数给出. 而$\hat{K}(z,z')$部分的谱分解在下节中考虑.

§5 不变积分算子在连续谱上的作用

§4 定理的证明中我们推导出了对于任何尖点形式 $f(z)$恒有

$$\int_{\Gamma \backslash \mathfrak{H}} \hat{H}(z,z') f(z') \mathrm{d}z' = 0,$$

即由$\hat{H}$定义的积分算子在尖点形式的空间上为零算子. 在本节中

我们首先要证明由$\hat{K}(z,z')$定义的积分算子在不完全θ级数空间的子空间$\Theta_0(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$上为零算子.

定理 设ψ为一个在$(0,\infty)$上有紧支集的光滑函数,而$\theta_\psi(z) = \sum_{\sigma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\psi(\mathrm{Im}(\sigma z))\in\Theta_0(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$为一不完全$\theta$级数,则

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\hat{K}(z,z')\theta_\psi(z')\mathrm{d}z' = 0.$$

证明 首先我们将$K(z,z')$作用于$\theta_\psi(z)$,并用$K(z,z')$与$\theta_\psi(z')$的定义将其展开:

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}K(z,z')\theta_\psi(z')\mathrm{d}z' = \int_{\mathfrak{H}}k(z,z')\sum_{\sigma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\psi(\mathrm{Im}(\sigma z'))\mathrm{d}z'.$$

交换积分与求和顺序后作变量替换.由于$k(z,z')$为点耦不变式我们得出$k(z,\sigma^{-1}z')=k(\sigma z,z')$.故

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}K(z,z')\theta_\psi(z')\mathrm{d}z' = \sum_{\sigma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\int_{\mathfrak{H}}k(\sigma z,z')\psi(\mathrm{Im}z')\mathrm{d}z'$$

亦为一不完全θ级数,以下记作$\theta_{\psi'}(z)$,其中

$$\psi'(z) = \int_{\mathfrak{H}}k(z,z')\psi(\mathrm{Im}z')\mathrm{d}z.$$

我们接着将$\hat{H}(z,z')$作用于$\theta_\psi(z)$上:

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\hat{H}(z,z')\theta_\psi(z')\mathrm{d}z'$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\theta_\psi(z')\mathrm{d}z'\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)E(z,s)E(z',\bar{s})\mathrm{d}r,$$

其中$s=\frac{1}{2}+\mathrm{i}r$.根据§4定理证明开头的论述,$h(r)$为$\boldsymbol{R}$上的Schwartz函数,且上式右端积分顺序可交换.而

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}E(z',\bar{s})\theta_\psi(z')\mathrm{d}z' = \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathfrak{H}}E(z',\bar{s})\psi(\mathrm{Im}z')\mathrm{d}z'.$$

由于函数$\psi(z')$只依赖于$y'(z'=x'+\mathrm{i}y')$,上式右边对x'积分后可得

$$\int_0^\infty\psi(y')y'^{\bar{s}}\frac{\mathrm{d}y'}{y'^2} + \frac{\xi(1-\bar{s})}{\xi(\bar{s})}\int_0^\infty\psi(y')y'^{1-\bar{s}}\frac{\mathrm{d}y'}{y'^2}.$$

故 $$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{H}(z,z')\theta_\psi(z')\mathrm{d}z'$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)E(z,s)\Big(\int_0^{+\infty}\psi(y')y'^{1-s}\frac{\mathrm{d}y'}{y'^2}$$
$$+ \frac{\xi(s)}{\xi(1-s)}\int_0^{+\infty}\psi(y')y'^{s}\frac{\mathrm{d}y'}{y'^2}\Big)\mathrm{d}r,$$
其中 $s=\frac{1}{2}+\mathrm{i}r$. 根据 Eisenstein 级数的函数方程,
$$\frac{\xi(s)}{\xi(1-s)}E(z,s) = E(z,1-s),$$
故上式可写成
$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{H}(z,z')\theta_\psi(z')\mathrm{d}z'$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)E(z,s)\Big(\int_0^{+\infty}\psi(y')y'^{1-s}\frac{\mathrm{d}y'}{y'^2}\Big)\mathrm{d}r,$$
或写成
$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{Re}s=\frac{1}{2}} h(s)E_\psi(z,s)\mathrm{d}s,$$
其中
$$E_\psi(z,s) = E(z,s)\int_0^{+\infty}\psi(y')y'^{1-s}\frac{\mathrm{d}y'}{y'^2} \xlongequal{\text{记为}} E(z,s)\mathscr{L}_\psi(s)$$
亦为一个 Eisenstein 级数.

以上通过函数 ψ 我们构造出了不完全 θ 级数 $\theta_\psi(z)$ 与 Eisenstein 级数 $E_\psi(z,s)$. 下面的引理表达了 $\theta_\psi(z)$ 与 $E_\psi(z,s)$ 之间的一个解析关系. 我们在此指出不完全 θ 级数张成的 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中的闭子空间 $\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 可正交分解为常数函数的子空间 $\hat{\Theta}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 及其正交补 $\Theta_0(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 的直和.

引理 对于任意在 $(0,+\infty)$ 上有紧支集的光滑函数 $\psi(y)$, 其不完全 θ 级数 $\theta_\psi(z)$ 属于 $\Theta_0(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 当且仅当 Eisenstein 级数 $E_\psi(z,s)$ 在 $\frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1$ 上无极点.

证明 如果 θ_ψ 属于 $\Theta_0(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$，则其与常数函数正交，即

$$0 = (\theta_\psi, 1) = \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \theta_\psi(z)\mathrm{d}z.$$

由 θ_ψ 的定义，上面积分可写成

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \theta_\psi(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \sum_{g\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \psi(\mathrm{Im}(gz))\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^2}\int_0^1 \psi(\mathrm{Im}\ z)\mathrm{d}x.$$

故有

$$\int_0^\infty \psi(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = 0,$$

即积分

$$\mathscr{L}_\psi(s) = \int_0^\infty \psi(y')y'^{1-s}\frac{\mathrm{d}y'}{y'^2}$$

在 $s=1$ 处有零点. 由于 $E(z,s)$ 在 $\frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1$ 上仅在 $s=1$ 处有单极点，故 $E_\psi(z,s)$ 在 $s=1$ 处解析. 证毕.

根据引理，对于满足 $\theta_\psi\in\Theta_0(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 的函数 ψ 来说，积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{Re}s=\frac{1}{2}} h(s)E_\psi(z,s)\mathrm{d}s$$

的积分路径可向右移，故

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{H}(z,z')\theta_\psi(z')\mathrm{d}z' = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{Re}s=S} h(s)E_\psi(z,s)\mathrm{d}s,$$

其中 $S>1$ 为一固定实数. 为计算上式等号右边，我们引用第 3 节 $k(z,z')$ 与 $h(s)$ 之间的关系

$$\int_{\mathfrak{H}} k(z,z')y'^s\mathrm{d}z' = h(s)y^s.$$

故

$$h(s)\mathscr{L}_\psi(s)y^s = \int_{\mathfrak{H}} k(z,z')y'^s\mathrm{d}z'\int_0^\infty \psi(y'')y''^{1-s}\frac{\mathrm{d}y''}{y''^2}$$
$$= \int_0^\infty \left[\int_{\mathfrak{H}} k(z,z')\psi(y''y')\mathrm{d}z'\right]y''^{1-s}\frac{\mathrm{d}y''}{y''^2}.$$

根据 Mellin 变换的逆变换公式，我们得到

$$\int_{\mathfrak{H}} k(z,z')\psi(y')\mathrm{d}z' = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{Re}\,s=S} h(s)\mathscr{S}_{\psi}(s)y^{s}\mathrm{d}s.$$

上式左端即为前面定义过的 $\psi'(z)$. 故

$$\begin{aligned}\theta_{\psi'}(z) &= \sum_{g\in\Gamma_{\infty}\backslash\Gamma}\psi'(\mathrm{Im}(gz))\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{Re}s=S} h(s)\mathscr{S}_{\psi}(s)\sum_{g\in\Gamma_{\infty}\backslash\Gamma}(\mathrm{Im}(gz))^{s}\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{Re}s=S} h(s)E_{\psi}(z,s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

故我们证明了对于 $\Theta_0(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中的不完全 θ 级数 θ_ψ,其积分变换

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{H}(z,z')\theta_{\psi}(z')\mathrm{d}z' = \theta_{\psi'}(z)$$

亦为一不完全 θ 级数.

根据前面的结果我们亦有

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} K(z,z')\theta_{\psi}(z')\mathrm{d}z' = \theta_{\psi'}(z).$$

故对于 $\theta_\psi\in\Theta_0(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$,

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{K}(z,z')\theta_{\psi}(z')\mathrm{d}z = 0.$$

定理得证.

§6 不变积分算子在离散谱上的作用

根据§4的结果对于任意尖点形式 $f(z)$ 恒有

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{H}(z,z')f(z')\mathrm{d}z' = 0,$$

故在尖点形式构成的子空间 L_0 上用 $K(z,z')$ 定义的积分算子与用 $\hat{K}(z,z')$ 定义的积分算子有相同的作用:

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} K(z,z')f(z')\mathrm{d}z' = \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{K}(z,z')f(z')\mathrm{d}z', \quad f\in L_0.$$

由§5的计算,我们又可推出 $\hat{H}$ 定义的积分算子在 $\hat{\Theta}$ 上,即在常数

波动形式上为零.

事实上,设 $f\in\hat{\Theta}$为一常数函数. 由于

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\hat{H}(z,z')f(z')\mathrm{d}z'$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)E(z,s)\mathrm{d}r\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}E(z',\bar{s})f(z')\mathrm{d}z',$$

其中 $s=\frac{1}{2}+ir$ 以及 $h(r)$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上的 Schwartz 函数,我们可知 $\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\hat{H}(z,z')f(z')\mathrm{d}z'$ 为 $\Theta_0(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中一函数. 又根据

$$\left(\frac{1}{4}+r^2\right)(f,E(z,s))=s(1-s)(f,E(z,s))=(f,\Delta E(z,s))$$

$$=(\Delta f,E(z,s))=(0,E(z,s))=0$$

我们知道$(f,E(z,s))=0$. 又对于任一不完全 θ 级数 $\theta_\psi(z)\in\Theta_0(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$,有

$$\left(\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\hat{H}(z,z')f(z')\mathrm{d}z',\theta_\psi\right)$$

$$=\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\left(\bar{\theta}_\psi(z)\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\hat{H}(z,z')f(z')\mathrm{d}z'\right)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\left(f(z')\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\hat{H}(z,z')\bar{\theta}_\psi(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}z'$$

$$=\left(f,\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\bar{\hat{H}}(z,z')\theta_\psi(z)\mathrm{d}z\right).$$

从$(f,E(z,s))=0$ 我们即可推出上面最后一个内积为零,从而

$$\left(\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\hat{H}(z,z')f(z')\mathrm{d}z',\theta_\psi\right)=0,$$

故

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\hat{H}(z,z')f(z')\mathrm{d}z'=0$$

对所有 $f\in\hat{\Theta}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$成立.

这样我们证明了对任意 $f\in\hat{\Theta}\oplus L_0$,恒有

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{H}(z,z')f(z')\mathrm{d}z' = 0.$$

由$\hat{H}(z,z')=K(z,z')-\hat{K}(z,z')$，我们推出

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} K(z,z')f(z')\mathrm{d}z' = \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{K}(z,z')f(z')\mathrm{d}z'$$

对所有 $f\in\hat{\Theta}\oplus L_0$ 成立.

因此为研究 K 定义的积分算子在离散谱上的性质，我们可直接考虑 $\hat{K}$ 的积分算子. 由 § 4 中的证明知$\hat{K}(z,z')$是 z 与 z'的一个有界函数. 由此推出由$\hat{K}(z,z')$定义的不变积分算子为一个迹类算子，其迹等于

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{K}(z,z')\mathrm{d}z,$$

这里一个积分算子

$$Lf(z)=\int_D l(z,z')f(z')\mathrm{d}z'$$

为一个迹类算子，如果积分 $\int_D |l(z,z)|\mathrm{d}z$ 收敛.

设 $f_0,f_1,\cdots$为 $\hat{\Theta}\oplus L_0$ 中的一个标准正交基，$\Delta f_i=\lambda_i f_i$，则由 § 2

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{K}(z,z')f_i(z')\mathrm{d}z' = h(r_i)f_i(z),$$

其中 $\lambda_i=\frac{1}{4}+r_i^2$. 由于该积分算子属于迹类，亦为 Hilbert-Schmidt 类，故

$$\hat{K}(z,z') = \sum_i h(r_i)f_i(z)\overline{f_i(z')}$$

及

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \hat{K}(z,z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\sum_i h(r_i),$$

这里对于 $\lambda_0=0$，取 $r_0=\pm\mathrm{i}/2$；对于正的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$，取

$$r_i=\pm\sqrt{\lambda_i-1/4}.$$

§7 Selberg 迹公式

§6 最后一式为 $\hat{K}$ 算子的迹的谱分解式. 我们还可以从另一个角度来计算 $\hat{K}$ 算子的迹,

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\hat{K}(z,z)\mathrm{d}z=\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\left(\sum_{g\in\Gamma}k(z,gz)-\hat{H}(z,z)\right)\mathrm{d}z. \tag{1}$$

对于 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 来说,我们可用 Jordan 标准形对其中矩阵分类: (1) 单位元素,Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $\lambda=\pm1$; (2) 抛物式元素,标准形为 $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $\lambda=\pm1$; (3) 双曲式元素,标准形为 $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1/\lambda\end{pmatrix}$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$, $\lambda\neq\pm1$; (4) 椭圆式元素,标准形为 $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \bar{\lambda}\end{pmatrix}$, $\lambda=\mathrm{e}^{i\theta}$, $0<|\theta|<\pi$. 对于每一类矩阵中的任一矩阵 g,我们都可将其写为 $g=\tau^{-1}\gamma\tau$, 其中 $\{\gamma\}_\Gamma$ 为 Γ 中的一个共轭等价类, γ 为其某一代表元素, $\tau\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma$, Γ_γ 为 γ 在 Γ 中的中心化子. 故

$$\begin{aligned}\sum_{g\in\Gamma}k(z,gz)&=\sum_{\{\gamma\}_\Gamma}\sum_{\tau\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma}k(z,\tau^{-1}\gamma\tau z)\\&=\sum_{\{\gamma\}_\Gamma}\sum_{\tau\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma}k(\tau z,\gamma\tau z).\end{aligned} \tag{2}$$

当 $g=I$ 为单位元素时, $\Gamma_I=\Gamma$, 故相应的项为 $k(z,z)=k(0)$. 因此我们可以将其从(2)式中分出来,得到

$$C(I)=k(0)\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}k(0).$$

当 $g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 为椭圆式元素时,我们有 $\lambda=\frac{a+d}{2}\pm\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{4-(a+d)^2}$, 其中 $a+d=0,\pm1$; 即 $\lambda=\mathrm{e}^{i\theta}$, 其中 $\theta=\pm\frac{\pi}{3},\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{2\pi}{3}$. 因此

$$g = p^{-1}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}p, \quad p \in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R}).$$

这样的 g 在 Γ 中的中心化子 Γ_g 当 $\theta=\pm\frac{\pi}{3}$ 或 $\pm\frac{2\pi}{3}$ 时由 $p^{-1}\gamma_0 p$ 生成,其中

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix}\cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0\end{pmatrix}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{3},$$

而当 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 时由 $p^{-1}\gamma_1 p$ 生成,其中

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}.$$

如此,则 g 共轭于 γ_0^l 或 γ_1^l, l 为一正整数. 当 g 共轭于 $\gamma_0^l=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ 时, $\sum\limits_{g\in\Gamma}k(z,gz)$ 中对应于这些 g 的部分为

$$\sum_{\tau\in\Gamma_{\gamma_0^l}\backslash\Gamma}k(\tau z,\gamma_0^l\tau z),$$

其对于 z 可在 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上积分. 故我们从(2)中又分出

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\sum_{\tau\in\Gamma_{\gamma_0^l}\backslash\Gamma}k(\tau z,\gamma_0^l\tau z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_{\gamma_0^l}\backslash\mathfrak{H}}k(z,\gamma_0^l z)\mathrm{d}z.$$

注意此时 $\Gamma_{\gamma_0^l}$ 为 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 的一个 3 阶有限子群. 故上式等于

$$\frac{1}{3}\int_{\mathfrak{H}}k\left(z,\frac{\alpha z-\beta}{\beta z+\alpha}\right)\mathrm{d}z.$$

因其中

$$k\left(z,\frac{\alpha z-\beta}{\beta z+\alpha}\right) = k\left(\frac{\left|z-\dfrac{\alpha z-\beta}{\beta z+\alpha}\right|^2}{y\cdot\mathrm{Im}\left(\dfrac{\alpha z-\beta}{\beta z+\alpha}\right)}\right) = k\left(\frac{\beta^2}{y^2}|z^2+1|^2\right),$$

故有

$$\frac{1}{3}\int_{\mathfrak{H}}k\left(\frac{|z^2+1|^2}{y^2}\sin^2\frac{l\pi}{3}\right)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}, \quad 其中 l=1,2,\ \sin^2\frac{l\pi}{3}=\frac{3}{4}.$$

类似地我们在 g 共轭于 γ_1^l 时,可得

$$\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{D}}k\left(\frac{|z^2+1|^2}{y^2}\sin^2\frac{\pi l}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2},\quad 其中\ l=1,\ \sin^2\frac{l\pi}{2}=1.$$

故所有椭圆式元素在(1)式中给出

$$C(R)=\frac{2}{3}\int_{\mathfrak{D}}k\left(\frac{3|z^2+1|^2}{4y^2}\right)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}+\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{D}}k\left(\frac{|z^2+1|^2}{y^2}\right)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

我们转而讨论双曲式元素. 如果 $g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 的特征值为 λ 与 $1/\lambda$, $\lambda\neq\pm1$, 则 $\lambda=\frac{1}{2}(a+d\pm\sqrt{(a+d)^2-4})$, 其中 $a+d=\pm3$, $\pm4,\cdots$. 由于 $\lambda, 1/\lambda$ 满足方程 $x^2-(a+d)x+1=0$, 可知 λ^2 满足方程 $x^2-((a+d)^2-2)x+1=0$, λ^3 满足方程 $x^2-(a+d)((a+d)^2-3)x+1=0$, 等等. 故对于任意双曲式元素 $g=p^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1/\lambda\end{pmatrix}p$, 我们总能找到一个双曲元素 $g_1=p^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 1/\lambda_1\end{pmatrix}p$ 使得 $\lambda=\lambda_1^l$, 即 $g=g_1^l$, 但是 g_1 不是任何其他双曲元素的方幂. 这样的一个 g_1 被称为原双曲式元素, 而 g 的中心化子等于 g_1 的中心化子: $\Gamma_g=\Gamma_{g_1}$. 举例说明, 设 $g_1=p^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 1/\lambda_1\end{pmatrix}p$ 为一双曲元素, $\lambda_1=\frac{1}{2}(3+\sqrt{3^2-4})$, 则 g_1 为所有 $g_1^l=p^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^l & 0\\ 0 & 1/\lambda_1^l\end{pmatrix}p$ 的原双曲元素, 其中 $\lambda_1^2=\frac{1}{2}(7+\sqrt{7^2-4})$, $\lambda_1^3=\frac{1}{2}(18+\sqrt{18^2-4})$, $\lambda_1^4=\frac{1}{2}(47+\sqrt{47^2-4})$, 等等. 这些 g_1^l 的中心化子均为 $\Gamma_{g_1}=\langle g_1\rangle=\{g_1^l\,|\,l\in\mathbf{Z}\}$. 因此我们可从(2)式中分出

$$\sum_{g_1}\sum_{l\neq0}\sum_{\tau\in\Gamma_{g_1}\backslash\Gamma}k(\tau z,g_1^l\tau z),$$

其中最外层的和式取遍所有不相共轭等价的原双曲元素. 由于 $k(z,z')$ 在 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ 作用下不变, 上式亦可写为

$$\sum_{g_1}\sum_{l\neq0}\sum_{\tau\in\Gamma_{g_1}\backslash\Gamma}k\left(\tau z,\begin{pmatrix}\lambda_1^l & 0\\ 0 & \lambda_1^{-l}\end{pmatrix}\tau z\right).$$

这个部分对 z 可积分，于是我们又可从(2)式中分出

$$\sum_{g_1}\sum_{l\neq 0}C(g_1^l),$$

其中

$$C(g_1^l)=\int_{\Gamma_{g_1}\backslash\mathfrak{H}}k(z,\lambda_1^{2l}z)\mathrm{d}z.$$

这里我们用到了 $g_1^l z=p^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^l & 0\\ 0 & \lambda_1^{-l}\end{pmatrix}pz=p^{-1}\lambda_1^{2l}(pz)$. 由于 $g_1 z=p^{-1}\lambda_1^2 pz$，上面的积分区域可取为 $-\infty<x<+\infty, 1\leqslant y\leqslant\lambda_1^2$. 故

$$\begin{aligned}C(g_1^l)&=\int_1^{\lambda_1^2}\int_{-\infty}^{+\infty}k\left(\frac{|z-\lambda_1^{2l}z|^2}{y\cdot\lambda_1^{2l}y}\right)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}\\&=\int_1^{\lambda_1^2}\int_{-\infty}^{+\infty}k\left(\frac{|z|^2}{y^2}\cdot\frac{|\lambda_1^{2l}-1|^2}{\lambda_1^{2l}}\right)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}.\end{aligned}$$

综上所述

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\hat{K}(z,z)\mathrm{d}z=&\frac{\pi k(0)}{3}+C(R)+\sum_{g_1}\sum_{l\neq 0}C(g_1^l)\\&+\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\Bigg(\sum_{\substack{g\in\Gamma\\ \text{抛物}}}k(z,gz)-\hat{H}(z,z)\Bigg)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

上式就是 Selberg 迹公式的**几何部分**. 为了 Selberg 迹公式的应用，我们下一步需要把上式右端的各项均表示为 k 的 Selberg 变换 h 的表达式. 具体的计算过程我们在此不引了. 计算的最后结果如下：

$$\frac{\pi k(0)}{3}=\frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty}r\,\frac{\mathrm{e}^{\pi r}-\mathrm{e}^{-\pi r}}{\mathrm{e}^{\pi r}+\mathrm{e}^{-\pi r}}h(r)\mathrm{d}r$$

$$\left(\text{其中}\frac{\mathrm{e}^{\pi r}-\mathrm{e}^{-\pi r}}{\mathrm{e}^{\pi r}+\mathrm{e}^{-\pi r}}\text{即是 }\pi r\text{ 的双曲正切函数 }\tanh(\pi r)\right).$$

$$C(R)=\frac{2}{3\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(2\pi/3)r}}{1+\mathrm{e}^{-2\pi r}}h(r)\mathrm{d}r+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\pi r}}{1+\mathrm{e}^{-2\pi r}}h(r)\mathrm{d}r,$$

$$C(g_1^l)=\frac{\log\lambda_1^2}{\lambda_1^l-\lambda_1^{-l}}g(l\log\lambda_1^2),$$

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\left(\sum_{\substack{g\in\Gamma\\ \text{抛物}}}k(z,gz)-\hat{H}(z,z)\right)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)\frac{\varphi'\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}\mathrm{d}r-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)\frac{\Gamma'(1+\mathrm{i}r)}{\Gamma(1+\mathrm{i}r)}\mathrm{d}r$$

$$-g(0)\log 2+\frac{1}{4}\left(1-\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right)h(0),$$

其中 $$\varphi(s)=\frac{\xi(1-s)}{\xi(s)}=\pi^{2s-1}\frac{\Gamma(1-s)\zeta(2-2s)}{\Gamma(s)\zeta(2s)}.$$

Selberg 迹公式的最后形式为

定理 设复变数函数 $h(r)$ 满足下列条件：

(1) $h(r)$ 在 $|\mathrm{Im}(r)|\leqslant\frac{1}{2}+\delta$ 上解析，其中 δ 为某一正常数；

(2) $h(-r)=h(r)$；

(3) $|h(r)|\leqslant c(1+|\mathrm{Re}(r)|)^{-2-\delta}$，

则

$$\frac{1}{2}\sum_{i}h(r_i)=\frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty}r\tanh(\pi r)h(r)\mathrm{d}r$$

$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi r/3}}{1+\mathrm{e}^{-2\pi r}}h(r)\mathrm{d}r$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\pi r}}{1+\mathrm{e}^{-2\pi r}}h(r)\mathrm{d}r$$

$$+\sum_{g_1}\sum_{l\neq 0}\frac{\log\lambda_1^2}{\lambda_1^l-\lambda_1^{-l}}g(l\log\lambda_1^2)$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi'\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}h(r)\mathrm{d}r$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma'(1+\mathrm{i}r)}{\Gamma'(1+\mathrm{i}r)}h(r)\mathrm{d}r-g(0)\log 2$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right)h(0),$$

其中 $r_i=\sqrt{\lambda_i-1/4}$，$\lambda_i(i=0,1,\cdots)$ 为 Δ 的特征值. 上面的所有和式与积分均绝对收敛.

§8 尖点形式的存在性

在本节中我们取 $h(r)=\mathrm{e}^{-r^2T}$. 这个函数显然满足 §7 定理的条件，同时与 $h(r)$ 对应的函数 g 等于

$$g(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)\mathrm{e}^{-iur}\mathrm{d}r=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4T}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-T\left(r+\frac{iu}{2T}\right)^2}\mathrm{d}r$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi T}}\mathrm{e}^{-u^2/(4T)}.$$

对于 Δ 的特征值 $\lambda_i(i=0,1,\cdots)$，我们知道 $\lambda_i=r_i^2+\frac{1}{4}$，故

$$\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 0}h(r_i)=\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 0}\mathrm{e}^{-r_i^2T}=\mathrm{e}^{T/4}\sum_{i\geqslant 0}\mathrm{e}^{-\lambda_iT}.$$

另一方面

$$\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 0}h(r_i)=\frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty}r\tanh(\pi r)\mathrm{e}^{-r^2T}\mathrm{d}r$$
$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi r/3-r^2T}}{1+\mathrm{e}^{-2\pi r}}\mathrm{d}r+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\pi r-r^2T}}{1+\mathrm{e}^{-2\pi r}}\mathrm{d}r$$
$$+\sum_{g_1}\sum_{l\neq 0}\frac{\log\lambda_1^2}{\lambda_1^l-\lambda_1^{-l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi T}}\mathrm{e}^{-\frac{l^2\log^2\lambda_1^2}{4T}}+\text{抛物项}.$$

由此可以得到

$$\sum_{i\geqslant 0}\mathrm{e}^{-\lambda_iT}=\frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty}r\tanh(\pi r)\mathrm{e}^{-\left(r^2+\frac{1}{4}\right)T}\mathrm{d}r$$
$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi r/3-\left(r^2+\frac{1}{4}\right)T}}{1+\mathrm{e}^{-2\pi r}}\mathrm{d}r+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\pi r-\left(r^2+\frac{1}{4}\right)T}}{1+\mathrm{e}^{-2\pi r}}\mathrm{d}r$$
$$+\sum_{g_1}\sum_{l\neq 0}\frac{\log\lambda_1^2}{\lambda_1^l-\lambda_1^{-l}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-T/4}}{\sqrt{4\pi T}}\mathrm{e}^{-\frac{l^2\log^2\lambda_1^2}{4T}}$$
$$+\mathrm{e}^{-T/4}(\text{抛物项}). \tag{3}$$

可以看出
$$\frac{e^{-t/4}}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{l^2\log^2\lambda_1^2}{4t}}$$
在某一区间$(0,\varepsilon)$中为递增函数，且当$t\to 0^+$时趋向于零. 故上式右边第三行的和式当$T\to 0^+$时趋向于零. 由于
$$\frac{e^{-2\pi r/3}}{1+e^{-2\pi r}}=\frac{1}{e^{2\pi r/3}+e^{-4\pi r/3}},\quad \frac{e^{-\pi r}}{1+e^{-2\pi r}}=\frac{1}{e^{\pi r}+e^{-\pi r}}$$
均在$(-\infty,+\infty)$上有界且绝对可积，(3)式右边第二行的两个积分对任意的$T\geqslant 0$一致有界. 而我们又有
$$\tanh \pi r=1+O(e^{-2\pi r}),\quad r\geqslant 0,$$
所以(3)式右边第一项等于
$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}\int_0^\infty r\tanh (\pi r)e^{-\left(r^2+\frac{1}{4}\right)T}dr\\&=\frac{1}{6}\int_0^\infty re^{-\left(r^2+\frac{1}{4}\right)T}(1+O(e^{-2\pi r}))dr\\&=\frac{1}{6}\int_0^\infty re^{-\left(r^2+\frac{1}{4}\right)T}dr+O\left(\int re^{-\left(r^2+\frac{1}{4}\right)T-2\pi r}dr\right).\end{aligned}$$
此式右边第二式为$O(1)$，而第一式通过变量替换$t=r^2+\frac{1}{4}$变为
$$\frac{1}{12}\int_0^\infty e^{-tT}dt=\frac{1}{12T}.$$
因此
$$\sum_{i\geqslant 0}e^{-\lambda_i T}=\frac{1}{12T}+O(1)+e^{-T/4}(\text{抛物项}).$$
我们进而计算抛物项(参见 Hejhal [19])为：
$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi'\left(\frac{1}{2}+ir\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}+ir\right)}h(r)dr-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma'(1+ir)}{\Gamma(1+ir)}h(r)dr\\&\quad -g(0)\log 2+\frac{1}{4}\left(1-\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right)h(0),\end{aligned}$$
这里
$$\varphi(s)=\pi^{2s-1}\frac{\Gamma(1-s)\zeta(2-2s)}{\Gamma(s)\zeta(2s)}.$$
因此

$$\frac{\varphi'\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)} = (\log\varphi(s))'|_{s=\frac{1}{2}+\mathrm{i}r}$$

$$= 2\log\pi - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}r\right)}$$

$$- 2\frac{\zeta'(1+2\mathrm{i}r)}{\zeta(1+2\mathrm{i}r)} - 2\frac{\zeta'(1-2\mathrm{i}r)}{\zeta(1-2\mathrm{i}r)}.$$

由此可得

$$\frac{\varphi'\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)} = O(\log(2+|r|)), \quad r\in\boldsymbol{R}.$$

这里我们用到了

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\gamma - \frac{1}{s} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+n} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \log s - \frac{1}{2s} - \frac{1}{12s^2} + O(s^{-4}), \quad |\mathrm{Arg}\, s| \leqslant \pi - \varepsilon$$

对任意 $\varepsilon>0$ 成立，及

$$A(r) = \frac{\zeta'(1+2\mathrm{i}r)}{\zeta(1+2\mathrm{i}r)} + \frac{1}{2\mathrm{i}r} = O(\log(2+|r|)), \quad \mathrm{Im}(r)\leqslant 0.$$

因此

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi'\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}h(r)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\log\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)\mathrm{d}r$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)} + \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}r\right)}\right]\mathrm{d}r$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)(A(r)+A(-r))\mathrm{d}r.$$

上式右边第一项等于 $g(0)\log\pi$. 对第二项、第三项的积分应用 Cauchy 积分定理得到

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}\mathrm{d}r,$$

及

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)A(r)\mathrm{d}r &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{Im}\,r=-\varepsilon}h(r)A(r)\mathrm{d}r\\ &= -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{Im}\,r=-\varepsilon}\frac{h(r)}{r}\mathrm{d}r+\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{Im}\,r=-\varepsilon}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+2\mathrm{i}r}}\right)h(r)\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{4}$$

(4)式右边第一项可利用

$$\int_{\mathrm{Im}\,r=-\varepsilon}\frac{h(r)}{r}\mathrm{d}r=\pi\mathrm{i}h(0)$$

得出

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{Im}\,r=-\varepsilon}\frac{h(r)}{r}\mathrm{d}r=-\frac{1}{2}h(0).$$

这是因为 $h(-r)=h(r)$，积分 $\int_{\mathrm{Im}\,r=-\varepsilon}\frac{h(r)}{r}\mathrm{d}r$ 可由在 $[-a,a]\times[\varepsilon,-\varepsilon]$ 上的围道积分在 $a\to+\infty$ 时逼近，而由 Cauchy 积分公式得出 $\pi\mathrm{i}h(0)$. (4)式右边第二项为

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}\int_{\mathrm{Im}\,r=-\varepsilon}h(r)n^{-2\mathrm{i}r}\mathrm{d}r=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}g(2\log n).$$

因此

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi'\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}h(r)\mathrm{d}r$$

$$= g(0)\log\pi - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}\mathrm{d}r$$

$$-\frac{1}{2}h(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}g(2\log n).$$

故所有抛物项加起来得

$$g(0)\log\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\left(\frac{\Gamma'(1+\mathrm{i}r)}{\Gamma(1+\mathrm{i}r)} + \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}\right)\mathrm{d}r$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}g(2\log n).$$

显然当 $T\to 0^+$ 时，

$$\mathrm{e}^{-T/4}g(0)\log\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-T/4}}{\sqrt{4\pi T}}\log\left(\frac{\pi}{2}\right) = O(T^{-1/2}).$$

由于

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}g(2\log n) = \frac{1}{\sqrt{\pi T}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}\mathrm{e}^{-\log^2 n/T} = O(T^{-1/2}),$$

我们亦有

$$\mathrm{e}^{-T/4}\cdot 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}g(2\log n) = O(T^{-1/2}),\quad T\to 0^+.$$

根据前面提过的

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s - \frac{1}{2s} - \frac{1}{12s^2} + O(s^{-4}),\quad |\mathrm{Arg}(s)| \leqslant \pi - \varepsilon,$$

我们有

$$\frac{\Gamma'(1+\mathrm{i}r)}{\Gamma(1+\mathrm{i}r)} + \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+r^2) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}+r^2\right) + O\left(\frac{1}{1+|r|}\right).$$

因此

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\left(\frac{\Gamma'(1+\mathrm{i}r)}{\Gamma(1+\mathrm{i}r)}+\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}r\right)}\right)\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2T}\left(\log(1+r^2)+\log\left(\frac{1}{2}+r^2\right)+O\left(\frac{1}{1+|r|}\right)\right)\mathrm{d}r.$$

作变量替换 $t=r\sqrt{T}$，得

$$-\frac{1}{4\pi\sqrt{T}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\left(\log\left(1+\frac{t^2}{T}\right)+\log\left(\frac{1}{2}+\frac{t^2}{T}\right)\right)\mathrm{d}t$$

$$+O\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+|t|}\mathrm{d}t\right)=O\left(T^{-1/2}\log\left(\frac{1}{T}\right)\right),\quad T\to 0^+.$$

这样我们就得出

$$\sum_{i\geqslant 0}\mathrm{e}^{-\lambda_i T}=\frac{1}{12T}+O\left(T^{-1/2}\log\left(\frac{1}{T}\right)\right),\quad T\to 0^+.$$

记 $N(x)$ 为小于或等于 x 的特征值 λ 的个数，则上式亦可写为

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xT}\mathrm{d}N(x)=\frac{1}{12T}+O\left(T^{-1/2}\log\left(\frac{1}{T}\right)\right).$$

取 $T\to 0^+$，我们则证明了 λ_i 的个数无限，由此推出尖点形式的存在性.

对 Selberg 迹公式进行更细致的估计我们可得出 λ_i 的分布情况. 这方面第一个结果是 Weyl 渐近定律：

$$N(\lambda)=\frac{\lambda}{12}+O(\lambda^{1/2}\log\lambda).$$

更精确的结果为

$$N(\lambda)=\frac{\lambda}{12}+c_1\lambda^{1/2}\log\lambda+c_2\lambda^{1/2}+O\left(\frac{\lambda^{1/2}}{\log\lambda}\right),$$

参见参考文献[19]与[20].

第三章　GL(2)群上的迹公式

在第二章我们介绍了上半平面 $\mathfrak{H}$ 上的 Selberg 迹公式及其应用. 在本章中我们要进一步介绍迹公式在近二三十年的发展形势. 为此我们要进行几个方面的过渡. 首先我们要从上半平面过渡到群 GL(2)上，其次我们要使用赋值向量语言. 现代迹公式与 Selberg 迹公式相比最重要的一点是引进了扭曲迹公式，通过比较迹公式与扭曲迹公式，我们最终可以得到群表示的基变换的结果.

现代迹公式的发展已经达到了任意约化(reductive)线性代数群的范围. 我们的介绍仍本着前两章的精神，深入浅出，以介绍迹公式理论的最简单形式为主. 本章主要围绕着 GL(2)上的迹公式，关于其更详细的内容读者可参阅参考文献[25]，[26]，[27]及[28]. 了解了 GL(2)迹公式理论的读者，可进一步阅读参考文献[29]与[30]以研究 GL(n)上及其他线性代数群上的迹公式理论.

§1　赋值向量环

关于赋值向量的详细内容读者可参阅文献[31]等著作，本节仅对此进行一简要介绍. 首先考虑 $\boldsymbol{Q}$ 上的 Pontryagin 对偶$\hat{\boldsymbol{Q}}$，即 $\boldsymbol{Q}$ 上的所有加性特征 χ 所组成的集合. 这里所谓的加性特征指从 $\boldsymbol{Q}$ 的加法群到 $\boldsymbol{C}$ 上单位圆上的点组成的乘法群的一个同态. 对于任意 $g\in\boldsymbol{Q}$，我们记 χ 在 g 上的值为$\langle g,\chi\rangle$. 因此$\langle g_1+g_2,\chi\rangle=\langle g_1,\chi\rangle\cdot\langle g_2,\chi\rangle$. 定义$\hat{\boldsymbol{Q}}$的一个加法群结构如下：$\langle g,\chi_1+\chi_2\rangle=\langle g,\chi_1\rangle\cdot\langle g,\chi_2\rangle$，其单位元素为平凡特征，记作 0，即对所有 $g\in\boldsymbol{Q}$ 有$\langle g,0\rangle$

$=1$. Pontryagin 对偶上的拓扑为对应于 Q 上紧子集的一致收敛拓扑. 由于 Q 具有离散拓扑, $\hat{Q}$为一紧致集合.

为了描述$\hat{Q}$, 我们考虑 $Q=\bigcup\limits_{n>0}\frac{1}{n}Z$, 即 Q 为$\frac{1}{n}Z$ 的正向极限:

$$Q=\varinjlim_{n}\frac{1}{n}Z.$$

具体地说, $\frac{1}{1}Z,\frac{1}{2}Z,\frac{1}{3}Z,\cdots$之中有一个偏序关系: 如果 $n|m$, 则存在包含映射$\frac{1}{n}Z\to\frac{1}{m}Z$; 在一般情况下, 设 l 为 m 与 n 的最小公倍数, 则存在包含映射$\frac{1}{n}Z\to\frac{1}{l}Z$ 与$\frac{1}{m}Z\to\frac{1}{l}Z$. 设 X 为一个加法群, 又设从每一个$\frac{1}{n}Z$ 都有映到 X 的同态, σ_n: $\frac{1}{n}Z\to X$, 并假定这组同态满足与上述包含映射的交换关系, 即如果 $n|m$, 则图表

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ {}^{\sigma_n}\nearrow & & \nwarrow^{\sigma_m} \\ \frac{1}{n}Z & \longrightarrow & \frac{1}{m}Z \end{array}$$

交换. Q 作为$\frac{1}{n}Z$ 的正向极限的意义为, 对于每一个这样的 X 与一组同态 σ_n, 恒存在一组从$\frac{1}{n}Z$ 到 Q 的同态 τ_n: $\frac{1}{n}Z\to Q$, 并满足与包含映射的交换关系, 及从 Q 到 X 的一个同态 θ:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \uparrow{\scriptstyle\theta} & \\ & Q & \\ {}^{\tau_n}\nearrow & & \nwarrow^{\tau_m} \\ \frac{1}{n}Z & \longrightarrow & \frac{1}{m}Z \end{array}$$

使得 $\sigma_n=\theta\circ\tau_n$, 这里我们可取 τ_n 为包含映射.

给定任意一个 Q 上的加性特征 χ: $Q\to C^\times$, 我们都可将其写为

$\chi\left(\frac{m}{n}\right)=e^{2\pi i a m/n}(a\in \boldsymbol{R})$，则由包含映射 τ_n，我们又可将此式看成一组$\frac{1}{n}\boldsymbol{Z}$ 上的特征 $\lambda_n\left(\frac{m}{n}\right)=e^{2\pi i a m/n}$. 每一个 λ_n 因此由$\frac{a}{n}\in \boldsymbol{R}/n\boldsymbol{Z}$ 惟一的确定. 这就表明$\hat{Q}$为 $\boldsymbol{R}/n\boldsymbol{Z}$ 的射影极限（反向极限）

$$\hat{Q}=\varprojlim_{n} \boldsymbol{R}/n\boldsymbol{Z}.$$

具体来说，这样一组 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{R}/2\boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{R}/3\boldsymbol{Z}$，…之中存在一个偏序关系：如果 $n\mid m$，则利用同余关系有 $\boldsymbol{R}/n\boldsymbol{Z}\leftarrow\boldsymbol{R}/m\boldsymbol{Z}$；一般地来说，如果 l 为 m 与 n 的最小公倍数，则存在 $\boldsymbol{R}/n\boldsymbol{Z}\leftarrow\boldsymbol{R}/l\boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{R}/m\boldsymbol{Z}\leftarrow\boldsymbol{R}/l\boldsymbol{Z}$ 的同余关系. 设 Y 为一加法群，又设有一组从 Y 到 $\boldsymbol{R}/n\boldsymbol{Z}$ 的同态 ρ_n：$Y\to\boldsymbol{R}/n\boldsymbol{Z}$ 并满足与同余映射的交换关系，即

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ {\scriptstyle\rho_n}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\rho_m} \\ \boldsymbol{R}/n\boldsymbol{Z} & \longleftarrow & \boldsymbol{R}/m\boldsymbol{Z} \end{array}$$

对所有 $n\mid m$ 交换，则反向极限表明，存在一组从$\hat{Q}$到 $\boldsymbol{R}/n\boldsymbol{Z}$ 的同态 λ_n，并满足与同余映射的交换关系，及一个从 Y 到$\hat{Q}$的同态

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \downarrow{\scriptstyle\psi} & \\ & \hat{Q} & \\ {\scriptstyle\lambda_n}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\lambda_m} \\ \boldsymbol{R}/n\boldsymbol{Z} & \longleftarrow & \boldsymbol{R}/m\boldsymbol{Z} \end{array}$$

（如果 $n\mid m$）使得 $\rho_n=\lambda_n\circ\psi$ 对所有 n 都成立. 这里 λ_n 实际为一限制映射 $\chi|_{\frac{1}{n}\boldsymbol{Z}}=\lambda_n$.

与此类似，我们记$\overline{\boldsymbol{Z}}$为 $\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$ 的反向极限：$\overline{\boldsymbol{Z}}=\varprojlim_{n}\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$，则我们可得出下面的正合序列：

$$0\to\overline{\boldsymbol{Z}}\to\hat{Q}\to\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}\to 0,$$

这里 $\overline{\boldsymbol{Z}}$ 到 $\hat{Q}$ 的映射是由

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbf{Z}} & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \cdots \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} & \longleftarrow & \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \\ \text{包含}\downarrow & & \downarrow\text{包含} \\ \cdots \mathbf{R}/n\mathbf{Z} & \longleftarrow & \mathbf{R}/m\mathbf{Z} \end{array}$$

$(n|m)$给出的. 映射

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbf{Z}} & & \\ \downarrow & & \\ \hat{\mathbf{Q}} & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \cdots \mathbf{R}/n\mathbf{Z} & \longleftarrow & \mathbf{R}/m\mathbf{Z} \end{array}$$

中的$\overline{\mathbf{Z}} \to \hat{\mathbf{Q}}$我们可将其看做包含映射,而 $\hat{\mathbf{Q}}$到 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 的映射由

$$\begin{array}{ccc} & & \hat{\mathbf{Q}} \\ & \swarrow & \downarrow \\ \mathbf{R}/\mathbf{Z} & \longleftarrow & \mathbf{R}/n\mathbf{Z}\cdots \end{array}$$

给出,其映射的核即为 $\overline{\mathbf{Z}}$.

根据孙子定理,我们可证明

$$\overline{\mathbf{Z}} = \prod_p \mathbf{Z}_p,$$

其中 $\mathbf{Z}_p$ 为 p-adic 整数环. 事实上,对于任意$(x_p) \in \prod_p \mathbf{Z}_p (x_p \in \mathbf{Z}_p)$,及任意一个 $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} > 0$,我们都可找到整数 $n_p (p|n)$,使得 $x_{p_i} + p_i^{a_i} \mathbf{Z}_{p_i} = n_{p_i} + p_i^{a_i} \mathbf{Z}_{p_i}$. 由孙子定理,同余式 $m = n_{p_i} (\mathrm{mod}\ p_i^{a_i})$ $(i = 1, \cdots, r)$有惟一模 n 的解. 这就得出$\prod_p \mathbf{Z}_p$ 到 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 的一个同态映射,而且$\prod_p \mathbf{Z}_p$ 到所有 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ $(n > 0)$的同态映射满足反向极限的要求. 故有

$$\begin{array}{c} \prod_p \mathbf{Z}_p \\ \downarrow \\ \overline{\mathbf{Z}} \\ \downarrow \quad \searrow \\ \cdots \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \leftarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \end{array}$$

$(n|m)$，这里$\prod_p \mathbf{Z}_p$到$\overline{\mathbf{Z}}$的映射为单映射，因为对任意两个不同的(x_p)与$(y_p) \in \prod_p \mathbf{Z}_p$，我们都能找到一个$n$使得它们在$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$中的像不同. 又从$\prod_p \mathbf{Z}_p$到$\overline{\mathbf{Z}}$的映射亦为满映射，因为上图中由$\prod_p \mathbf{Z}_p$到任一$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$的映射都是满射.

通过这个结果，我们可最后得到赋值向量的结构. 设$\mathbf{A}_f = \mathbf{Q}\overline{\mathbf{Z}} = \mathbf{Q}\prod_p \mathbf{Z}_p$，则可知$\mathbf{A}_f = \prod_p{}' \mathbf{Q}_p$，这里的乘积$\prod{}'$为限制乘积，即对任何$(x_p) \in \mathbf{A}_f$，除在有限个$p$处外都有$x_p \in \mathbf{Z}_p$. 定义$\mathbf{Q}$上的**赋值向量环**，亦称**阿代尔环**，为$\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \mathbf{A}_f = \mathbf{R} \times \prod_p{}' \mathbf{Q}_p$. 注意$\mathbf{Q}$对角地嵌入到这个直积中，故$\mathbf{A}/\mathbf{Q} = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \overline{\mathbf{Z}}$. 由于

$$0 \to \overline{\mathbf{Z}} \to \hat{\mathbf{Q}} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to 0$$

正合，我们最终证明了$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{A}/\mathbf{Q}$. 由于$\mathbf{Q}$具有离散拓扑，我们亦证明了$\mathbf{A}/\mathbf{Q}$紧致.

我们定义**伊代尔群**为乘法群$\mathbf{A}^\times = \{(x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A} \mid xy = 1\}$，其拓扑为由$\mathbf{A} \times \mathbf{A}$诱导的拓扑. 注意$\mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times$不紧致.

对于任意$\mathbf{Q}$的有限扩域F，我们定义$\mathbf{A}_F = F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{A}$，则$\mathbf{A}_F/F$亦为$F$的 Pontryakin 对偶$\hat{F}$. 同样可定义$\mathbf{A}_F^\times = \{(x, y) \in \mathbf{A}_F \times \mathbf{A}_F \mid xy = 1\}$，其拓扑为$\mathbf{A}_F \times \mathbf{A}_F$诱导的拓扑. 利用$\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \prod_p{}' \mathbf{Q}_p$可知

$$\mathbf{A}_F = F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \times \prod_p{}' F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p.$$

设$F = \mathbf{Q}(\xi)$由$\mathbf{Q}$上一个首一不可约多项式f的根ξ生成，又设f

在域 $\boldsymbol{Q}_p$ 上分解为不可约多项式的乘积 $f=f_1\cdots f_r$. 令 ξ_i 为 $f_i(i=1,\cdots,r)$ 在 $\boldsymbol{Q}_p$ 的某一个扩域中的一个根，则代数 $F\otimes_Q\boldsymbol{Q}_p$ 同构于 $\boldsymbol{Q}_p(\xi_1)\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Q}_p(\xi_r)$. 同样道理，代数 $F\otimes_Q\boldsymbol{R}$ 也同构于由若干个 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 一起组成的一个直和. 因此 $\boldsymbol{A}_F$ 可以表示为 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$ 及 $\boldsymbol{Q}_p$ 的有限扩域的限制直积. 记这些局部域为 F_v，则 $\boldsymbol{A}_F=\prod_v{}' F_v$.

以下我们记非 Archimedes 域 F_v 上的赋值为 $|x|_v$，F_v 的整数环为 $R_v=\{x\in F_v\mid |x|_v\leqslant 1\}$，极大素理想为 $P_v=\{x\in F_v\mid |x|_v<1\}$. 又取 ϖ_v 为 P_v 的一个生成元，即 $P_v=\varpi_v R_v$. R_v/P_v 为一个有限域，称为 F_v 的**剩余域**. 如果 R_v/P_v 有 q_v 个元素，则我们将赋值 $|x|_v$正规化使得 $|\varpi_v|_v=q_v^{-1}$. 由这个正规化了的赋值我们可得出 F_v 上 Haar 测度的变量替换公式，即 $\mathrm{d}(ax_v)=|a|_v\mathrm{d}x_v$，这里 $\mathrm{d}x_v$ 为 F_v 上任意一个在加性变换下不变的 Haar 测度：$\mathrm{d}(x_v+b)=\mathrm{d}x_v$. 而在 $F_v^\times$ 上在积性变换下不变的 Haar 测度可取为 $\mathrm{d}^\times x_v=c\,\dfrac{\mathrm{d}x_v}{|x_v|_v}$，其中 c 为任意正常数. 我们指出 q_v 必为某一素数 p 的幂，因此对这个 p 来说 F_v 是从 $F\otimes_Q\boldsymbol{Q}_p$ 的直和分解中得出的，我们以下称 v 立于 p 之上，并记作 $v|p$.

设 E 为 F 的一个有限扩域. 以上讨论又可在 E 与 F 之间进行，即 $\boldsymbol{A}_E=\prod_v{}' E\otimes_F F_v$，其中 $E\otimes_F E_v\cong\prod_{w|v}E_w$. 故 $\boldsymbol{A}_E=\prod_w{}' E_w$. 对于非 Archimedes 域 E_w 我们仍可定义 R_w,P_w,ϖ_w,q_w 及 $|\varpi_w|_w=q_w^{-1}$. 设 E_w 是 F_v 的一个 n 次扩域. 如果 $|\varpi_v|_w=q_w^{-e}$，则 e 为 n 的一个因子且 $q_w=q_v^{n/e}$. 这个 e 称为 E_w 在 F_v 上的**分歧指数**. 如果 $e=1$，E_w 叫做 F_v 的一个**非分歧扩域**；如果 $e=n$，则 E_w 称为 F_v 的一个**全分歧扩域**.

对于 F 上的伊代尔群 $\boldsymbol{A}_F^\times$，我们指出 $F^\times\prod_{v<\infty}\boldsymbol{R}_v^\times$ 一般来说不够大，不能生成 $\boldsymbol{A}_F^\times$ 的非 Archimedes 部分 $\boldsymbol{A}_{f_F}^\times$. 但其商

$$\boldsymbol{A}_{f_F}^\times\Big/\Big(F^\times\prod_{v<\infty}\boldsymbol{R}_v^\times\Big)$$

为有限群，其阶数即为代数数域 F 的类数. 对于任意的 $a\in \boldsymbol{A}_F^{\times}$，我们定义 $|a|_{\boldsymbol{A}_F}=\prod_v |a|_v$ 为其**模**. 对此我们有 **Artin 乘积定理**.

定理 对任意的 $a\in F^{\times}$，有 $|a|_{\boldsymbol{A}_F}=1$.

证明 如果 $F=\boldsymbol{Q}$，此定理可直接证明. 例如对于 $a=p$，有 $|a|_{\boldsymbol{R}}=p$，$|a|_p=p^{-1}$，而对所有其他的 v 成立 $|a|_v=1$. 对于一般代数数域 F，由 $a\in F^{\times}$ 我们得到 $\boldsymbol{A}_F$ 上的一个自同构 $x\to x'=ax$. 因为这个自同构将 F 映射到 F 自己，我们由此又可诱导出 $\boldsymbol{A}_F/F$ 的一个自同构. 另一方面 $\boldsymbol{A}_F$ 上的这个自同构将 $\boldsymbol{A}_F$ 上的 Haar 测度 $\mathrm{d}x=\prod_v \mathrm{d}x_v$ 变成 $\mathrm{d}x'=|a|_{\boldsymbol{A}_F}\mathrm{d}x=\prod_v |a|_v\mathrm{d}x_v$，而由其又诱导出 $\boldsymbol{A}_F/F$ 上的同样的变数替换公式 $\mathrm{d}x'=|a|_{\boldsymbol{A}_F}\mathrm{d}x$. 由于 $\boldsymbol{A}_F/F$ 紧致，

$$\int_{\boldsymbol{A}_F/F}\mathrm{d}x=\int_{\boldsymbol{A}_F/F}\mathrm{d}x'$$

为有限，故我们推出

$$|a|_{\boldsymbol{A}_F}=1.$$

证毕.

§2 自 守 形 式

我们在第一、二两章的讨论都围绕着上半平面 $\mathfrak{H}$ 上的模形式进行的. 由于 $\mathfrak{H}\cong \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})/\mathrm{SO}(2)$，可以进一步考虑群 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ 上的模形式. 我们前面只考虑了 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 的最简单的情形，但所得的结果大都可推广到 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 的同余子群上. 我们回忆 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 的**主同余子群** $\Gamma(n)$ 为映射 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})\to\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$ 的核，$\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 的一个子群 Γ 被称为**同余子群**，如果存在一个 n 使得 $\Gamma(n)\subset\Gamma$. 所以在一般情况下我们应考虑 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ 在 $\Gamma(n)$ 下不变的模形式.

更进一步我们有下列结果

$$\varprojlim_n (\Gamma(n)\backslash \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})) = \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Q})\backslash \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{A}). \qquad (1)$$

所以如果我们想要研究 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ 上对每一个主同余子群 $\boldsymbol{\Gamma}(n)$ 的模形式，我们可以直接考虑 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{A})$ 上对于 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Q})$ 的模形式，或者更理想的来说，研究 $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A})$ 上对于 $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{Q})$ 的模形式. 由此我们就得出群 $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A})$ 的自守表示的概念.

在介绍自守群表示之前，我们指出(1)式被称作 SL(2)的**强逼近定理**，其证明可见参考文献[32]及[33]. 一般的强逼近对于单连通半单群均成立，对于代数数域 F 上的 $\mathrm{SL}(n)$ 与 $\mathrm{GL}(n)$，有以下形式：

定理 设 F 为 $\boldsymbol{Q}$ 的一个有限扩域，记 F_∞ 为 $\boldsymbol{A}_F$ 的 Archimedes 部分.

(1) $\mathrm{SL}(n,F_\infty)\mathrm{SL}(n,F)$ 在 $\mathrm{SL}(n,\boldsymbol{A}_F)$ 中稠密；

(2) 设 $\boldsymbol{K}_0$ 为 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{A}_{f_F})$ 的一个开紧致子群，其在行列式映射下的像为 $\prod\limits_{v<\infty} R_v^\times$，则商 $\mathrm{GL}(n,F)\mathrm{GL}(n,F_\infty)\backslash \mathrm{GL}(n,\boldsymbol{A}_F)/\boldsymbol{K}_0$ 为一有限集合，其元素个数为 F 的类数.

(1)式与我们上节证明的

$$\varprojlim_n \boldsymbol{R}/n\boldsymbol{Z} = \hat{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{A}/\boldsymbol{Q}$$

相比非常类似. 事实上 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ 可由幂幺矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ 生成，而 $N(\boldsymbol{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \boldsymbol{Q} \right\}$ 与 $\underline{N}(\boldsymbol{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \boldsymbol{Q} \right\}$ 均同构于 $\boldsymbol{Q}$，具有加法结构. 由此我们亦可得到(1)式的直接证明. 与此事实成对比，具有乘法结构的伊代尔(idele)群不满足这种强逼近性质，不能用射影极限方法来研究伊代尔群的结构. 具体来说，取 $G(\boldsymbol{Q}) = \mathrm{GL}(1,\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}^\times$，则 $G(\boldsymbol{A}) = \mathrm{GL}(1,\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^\times$，但是

$$\varprojlim_{n} G(nZ)\backslash G(\boldsymbol{R}) \neq \boldsymbol{A}^{\times} / \boldsymbol{Q}^{\times}.$$

这个事实等价于类数不恒等于 1.

经过以上的准备，我们就可以理解下面给出的自守形式与自守群表示的定义了. 设 $G=\mathrm{GL}(2)$，其中心记为 Z. 取 $\omega=\prod_{v}\omega_v$ 为 $\boldsymbol{A}_F^{\times}$ 上的一个积性特征，其在 $F^{\times}$上等于 1. 对于任意非 Archimedes 局部域 F_v，我们记 $K_v=\mathrm{GL}(2,R_v)$为 $G_v=\mathrm{GL}(2,F_v)$的最大开紧子群，这里 $\mathrm{GL}(2,R_v)$表示其中矩阵元素均属于 R_v 而行列式属于 $R_v^{\times}$. 对于实的局部域 $F_v=\boldsymbol{R}$，我们记 $K_v=\mathrm{O}(2,\boldsymbol{R})$；对于 $F_v=\boldsymbol{C}$，则取 $K_v=\mathrm{U}(2,\boldsymbol{C})$. 在整体赋值向量环上我们记 $K=\prod_{v}K_v$ 而用 $K_{\infty}=\prod_{v=\infty}K_v$ 表示 K 的 Archimedes 部分，用 $K_f=\prod_{v<\infty}K_v$ 表示 K_v 的非 Archimedes 部分. 对于 GL(2)的在 $\boldsymbol{A}_F$ 上的群 $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A}_F)$，我们将其定义为所有局部域 F_v 上的群 $\mathrm{GL}(2,F_v)$的限制乘积：$G(\boldsymbol{A}_F)=\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A}_F)=\prod_{v}{}'\mathrm{GL}(2,F_v)$. 这里限制乘积的意义在于任意 $g\in\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A}_F)$都可以表示为 $g=(g_v)$，其中几乎所有的(即除有限个外)$g_v\in K_v$.

我们考虑 $G(\boldsymbol{A}_F)$上定义的一个函数 $f(g)$. 我们假定 $f(g)$是一光滑函数. 具体说来，f 对于非 Archimedes 的 g_v 是局部常数函数，而对 Archimedes 的 g_v 是通常意义下的无穷可微函数. 对于每一个 $k\in K$，我们可得到一个 g 的函数 $f(gk)$. 如果所有对应于 $k\in K$ 的这些函数生成的空间为有限维，我们则称 $f(g)$是对于 $K=\prod_{v}K_v$ 为**右有限的**.

记 $G(\boldsymbol{A}_F)$的 Archimedes 部分为 $G_{\infty}=\prod_{v=\infty}G_v$，其中 v 取遍所有 Archimedes 局部域 F_v. 给定任意一个 G_{∞}的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中的元素 Y，我们可定义一个 G_{∞}上的微分算子

$$Yf(g)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\exp tY\cdot g)\Big|_{t=0}.$$

这里我们说一个算子 T 是**右不变的**，如果 $T(\rho(g)f)=\rho(g)(Tf)$，其中 ρ 为右正则变换，即 $\rho(g)f(h)=f(hg)$. 显然 Y 是一个右不变微分算子. 这个从 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 到右不变微分算子的映射可以扩张到 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 上而得到 $U(\mathfrak{g})$ 到所有右不变微分算子所构成的代数 $D(G_\infty)$ 之间的一个同构. 在这个同构下 $U(\mathfrak{g})$ 的中心 $Z(\mathfrak{g})$ 对应于所有左右不变微分算子所构成的环. 我们称一个 G_∞ 上的函数 f 为 **$Z(\mathfrak{g})$ 有限的**，如果 $Z(\mathfrak{g})f$ 是一个有限维向量空间. 换句话说，f 是 $Z(\mathfrak{g})$ 有限的，如果 f 被 $Z(\mathfrak{g})$ 中某一有限余维数的理想 I 所零化. 注意当 f 被某个余维数为 1 的理想零化时，函数 f 就成为 $Z(\mathfrak{g})$ 中每一个左右不变微分算子的特征函数.

定义（Borel[34], Gelbart[35]） 群 $G(\mathbf{A}_F)=\mathrm{GL}(2,\mathbf{A}_F)$ 上的一个光滑函数 $f(g)$ 被称为一个**自守形式**，如果下列条件成立：

(1) f 在 $G(F)$ 下左不变：$f(\gamma g)=f(g), \gamma\in G(F)$；

(2) f 具有中心特征 ω：$f(zg)=\omega(z)f(g), z\in Z(\mathbf{A}_F)$；

(3) f 对于 $K=\prod\limits_v K_v$ 为右有限的；

(4) 作为 G_∞ 上的函数 f 为 $Z(\mathfrak{g})$ 有限的；

(5) f 为慢增函数：对于每个 $c>0$ 及任意 $G(\mathbf{A}_F)$ 的紧子集 Ω，存在常数 C 及 N 使得

$$\left|f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right)\right| \leqslant C|a|_{\mathbf{A}_F}^N$$

对所有 $g\in\Omega$ 及满足 $|a|_{\mathbf{A}}>c$ 的 $a\in\mathbf{A}_F^\times$ 成立.

我们在此指出，根据(1)式，条件(1)来源于经典模形式定义中 f 在同余子群作用下不变的条件，条件(2)来源于我们用GL(2)代替了 SL(2)，条件(3)相当于上半平面 $\mathfrak{H}$ 等于 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})/\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$，条件(4)相当于 f 在某些左右不变微分算子作用下不变，而条件(5)则等价于上半平面波动形式的慢增条件.

如果一个有中心特征 ω 的自守形式 f 同时又满足条件

(6) 对于所有 g，积分

$$\int_{F\backslash\mathbf{A}_F} f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}g\right)\mathrm{d}x = 0,$$

则 f 被称为**自守尖点形式**. 记所有尖点形式所构成的空间为 $A_0(\omega)$.

可以证明由条件(3)与(4)可推出任何自守形式都是实解析的(参见文献[34])，而任何自守尖点形式都在 $Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$ 上平方可积：

$$\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} |f(g)|^2\mathrm{d}g < +\infty.$$

记所有在 $Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$ 上平方可积的具有中心特征 ω 的函数所构成的空间为 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F),\omega)$，并记 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F),\omega)$ 中满足条件

(6′) 对于几乎所有 g，积分

$$\int_{F\backslash\mathbf{A}_F} f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}g\right)\mathrm{d}x = 0$$

的函数 f 所构成的子空间为 $L_0^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F),\omega)$，则 $A_0(\omega)\subset L_0^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F),\omega)$. 事实上 $A_0(\omega)$ 为 $L_0^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F),\omega)$ 中满足条件(3)和(4)的光滑函数 f 所构成的稠密子空间. 因此我们以后就以 $L_0^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F),\omega)$ 来表示 $G(\mathbf{A}_F)$ 上中心特征为 ω 的自守尖点形式的空间. 注意，对于非尖点形式，慢增条件不能推出平方可积，故自守非尖点形式不一定属于 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F),\omega)$.

§3 自守群表示

群 $G(\mathbf{A}_F)$ 在 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F),\omega)$ 中自守形式空间上的作用 ρ_ω 为右平移作用：

$$\rho_\omega(g)f(h) = f(hg).$$

为了得到更好的性质，我们一般不用群 G 的作用，而引进从 ρ_ω 诱

导出的积分算子.设 φ 为 $G(\boldsymbol{A}_F)$ 上满足条件

$$\varphi(zg)=\omega^{-1}(z)\varphi(g),\quad z\in Z(\boldsymbol{A}_F),\ g\in G(\boldsymbol{A}_F)$$

的一个无穷次可微、模 $Z(\boldsymbol{A}_F)$ 紧支集函数.这里 $Z(\boldsymbol{A}_F)=\{Z\in G(\boldsymbol{A}_F)\mid zg=gz$ 对所有 $g\in G(\boldsymbol{A}_F)$ 成立$\}$为群 $G(\boldsymbol{A}_F)$ 的中心.模中心 $Z(\boldsymbol{A}_F)$ 紧支集函数是指该函数的支集包含在 $Z(\boldsymbol{A}_F)C$ 之内,而 C 为 $G(\boldsymbol{A}_F)$ 的一个紧子集.假设函数 φ 可分解为局部函数的乘积 $\varphi=\prod_v\varphi_v$,即对于 $g=(g_v)$ 有 $\varphi(g)=\prod_v\varphi_v(g_v)$,且对几乎所有的 v,

$$\varphi_v(g_v)=\begin{cases}\omega_v^{-1}(z_v), & \text{如果 } g_v=z_vk_v,z_v\in Z(F_v),k_v\in K(F_v),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

这里 φ 无穷次可微意味着对于 $v=\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$,φ_v 在常规意义下无穷次可微,而对于非 Archimedes 的 v,φ_v 为局部常数函数,则从右平移算子 ρ_ω 诱导出的积分算子 $\rho_\omega(\varphi)$,定义为

$$\rho_\omega(\varphi)f(h)=\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\varphi(g)f(hg)\mathrm{d}g,\tag{2}$$

其中 f 为中心特征为 ω 的任意自守形式.通过变量替换上式可写为

$$\rho_\omega(\varphi)f(h)=\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\varphi(h^{-1}g)f(g)\mathrm{d}g.$$

由于 f 在 $G(\boldsymbol{F})$ 下左不变,我们得出

$$\rho_\omega(\varphi)f(h)=\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}K(h,g)f(g)\mathrm{d}g,$$

其中

$$K(h,g)=\sum_{\gamma\in Z(F)\backslash G(F)}\varphi(h^{-1}\gamma g)$$

为积分算子的核函数.由于 φ 具有模中心的紧支集,而 $G(\boldsymbol{F})$ 在 $G(\boldsymbol{A}_F)$ 中离散,所以对于固定的 h 与 g,上面的和式只有有限个非零项.

积分算子 $\rho_\omega(\varphi)$ 在整个自守形式空间上并不属于迹类.与 Selberg 迹公式类似,我们要考虑其在自守尖点形式空间 $L_0^2(G(F)$

$\backslash G(\mathbf{A}_F),\omega)$上的作用. 为此我们把 $\rho_\omega(\varphi)$在 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F),\omega)$的作用写为

$$\rho_\omega(\varphi)f(h) = \int_{Z(\mathbf{A}_F)N(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} H(h,g)f(g)\mathrm{d}g,$$

其中 $N(F)=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} x\in F\right\}$,而

$$H(h,g) = \sum_{\gamma\in N(F)} \varphi(h^{-1}\gamma g).$$

对于尖点形式 $f\in L_0^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F),\omega)$,我们还可以把上式写为

$$\rho_\omega(\varphi)f(h) = \int_{Z(\mathbf{A}_F)N(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} \widetilde{H}(h,g)f(g)\mathrm{d}g,$$

其中

$$\widetilde{H}(h,g) = H(h,g) - \int_{N(\mathbf{A}_F)} \varphi(h^{-1}ng)\mathrm{d}n.$$

这是因为积分

$$\int_{Z(\mathbf{A}_F)N(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} f(g)\mathrm{d}g\int_{N(\mathbf{A}_F)} \varphi(h^{-1}ng)\mathrm{d}n$$
$$= \int_{Z(\mathbf{A}_F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} \varphi(h^{-1}g)\mathrm{d}g\int_{N(F)\backslash N(\mathbf{A}_F)} f(n^{-1}g)\mathrm{d}n$$

对于尖点形式 f 来说等于零.

我们可以证明在 $L_0^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F),\omega)$上,积分算子

$$\int_{Z(\mathbf{A}_F)N(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} \widetilde{H}(h,g)f(g)\mathrm{d}g \tag{3}$$

属于 Hilbert-Schmidt 类(见参考文献[37]). 这里一个积分算子 $Lf(z)=\int_D l(z,z')f(z')\mathrm{d}z'$被称为一个 Hilbert-Schmidt 算子,如果$\int_D\int_D |l(z,z')|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}z'$收敛. 由于任何具有高阶导数的函数 φ 都可以写为有限个卷积 $\varphi_1 * \varphi_2$ 之和(见参考文献[38]或[39]),φ 所定义积分算子(2)可以写为积分算子的乘积的有限和. 故(3)属于迹类,此即为积分算子 $\rho_\omega(\varphi)$限制在不变子空间 $L_0^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F),\omega)$上所得到的算子(记作 $\rho_{\omega,0}(\varphi)$) 属于迹类. 这里一个积分算子

$Lf(z)=\int_D l(z,z')f(z')\mathrm{d}z'$被称为**迹类算子**，如果 $l(z,z)$ 在 D 上绝对可积.

为计算 $\rho_{\omega,0}(\varphi)$的迹，我们可以用第二章证明古典 Selberg 迹公式的同样方法，即用 Eisenstein 级数构造一个新的积分核 $\hat{H}(h,g)$ 使其作用在尖点形式上为零. 从而 $\rho_{\omega,0}(\varphi)$的迹的计算就等于对$\hat{K}(h,g)=K(h,g)-\hat{H}(h,g)$按对角线的方式积分. 关于这个思路的详细证明，可见参考文献[38].

§4 截 算 子

另一个计算 $\rho_{\omega,0}(\varphi)$的迹的方法是应用截算子. 截算子最早由 Langlands 用于 Eisenstein 级数的积分上，见参考文献[40]，后由 Arthur 应用到整个迹公式的计算之中(见文献[41]，[42]).

对于 $G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)$上任意函数 $\varphi(g)$，记

$$\varphi_N(g)=\int_{N(F)\backslash N(\boldsymbol{A}_F)}\varphi(ng)\mathrm{d}n$$

为 φ 的 Fourier 级数的常数项. 回忆群 GL(2)有 Iwasawa 分解，即任何 $g\in G(\boldsymbol{A}_F)$均可表示为 $g=\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}k$，其中 $x\in\boldsymbol{A}_F$，$a,b\in\boldsymbol{A}_F^{\times}$，$k\in K(\boldsymbol{A}_F)$. 定义 $G(\boldsymbol{A}_F)$上的一个函数 H 如下:

$$H(g)=\left|\frac{a}{b}\right|_{\boldsymbol{A}},\quad \text{如果 } g=\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}k.$$

(我们亦可以类似地定义局部 H_v 函数.)可以验证 $H(g)$的值不依赖于 $g=\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}k$ 的表示法. 给定任意常数 $T>1$，设 χ_T 为区间$[T,+\infty)$的特征函数，则 φ 上的截算子 Λ^T 定义为

$$\Lambda^T\varphi(g)=\varphi(g)-\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\varphi_N(\gamma g)\chi_T(H(\gamma g)),$$

其中 $P=AN=\left\{\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix}\right\}$，$A=\left\{\begin{pmatrix}*&0\\0&*\end{pmatrix}\right\}$. 我们指出，对于满

足尖点形式条件

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} \varphi(ng)\mathrm{d}n = 0$$

的函数 φ,恒有 $\Lambda^T\varphi=\varphi$. 对于一般的函数 φ,则有下列结果.

引理(Duflo, Labesse[38]) 给定 $\gamma\in G(F)$. 如果存在一个 $g\in G(\mathbb{A}_F)$满足 $H(g)>1$ 及 $H(\gamma g)>1$,则 $\gamma\in P(F)$.

证明 Artin 乘积定理指出对于 $a\in F^\times$ 恒有 $|a|_{\mathbb{A}_F}=1$. 故对于 $\gamma\in P(F)$我们有 $H(g)=H(\gamma g)$. 根据 GL(2)的 Bruhat 分解,任意 $\gamma\in \mathrm{GL}(2,F)$均可写为 $\gamma=p$ 或 $n\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}p$,其中 $p\in P(F)$,$n\in N(F)$. 引理的证明因此归结为证明:对任意满足 $H(g)>1$ 的 g 恒有 $H\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}g\right)\leqslant 1$.

设 $g=\prod_v g_v=\prod_v\begin{pmatrix}1&x_v\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_v&0\\0&b_v\end{pmatrix}k_v$ 满足 $\prod_v\left|\frac{a_v}{b_v}\right|_v>1$,则 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}g_v=\begin{pmatrix}b_v&0\\0&a_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&b_vx_v/a_v\end{pmatrix}k_v$. 先考虑 p 进局部域 F_v 的情况. 如果 $b_vx_v/a_v\in R_v$,则 $\begin{pmatrix}0&1\\1&b_vx_v/a_v\end{pmatrix}\in K_v$. 如 $b_vx_v/a_v\notin R_v$,则 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}g_v=\begin{pmatrix}a_v/x_v&0\\0&b_vx_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b_vx_v/a_v\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\a_v/(b_vx_v)&1\end{pmatrix}k_v$,其中 $\begin{pmatrix}-1&0\\a_v/(b_vx_v)&1\end{pmatrix}\in K_v$. 由于此时 $\left|\frac{a_v/x_v}{b_vx_v}\right|_v<\left|\frac{b_v}{a_v}\right|_v$,我们在上述两种情况下得到 $H_v\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}g_v\right)\leqslant\left|\frac{b_v}{a_v}\right|_v$. 对 $F_v=\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的情况作类似分析,我们最终得出 $H\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}g\right)\leqslant\prod_v\left|\frac{b_v}{a_v}\right|_v<1$. 证毕.

这个引理的目的是要说明对于 $T>1$,$\Lambda^T\varphi(g)$定义中的和式至多只有一个非零项. 事实上,设对于 $g\in G(\mathbb{A}_F)$有 $\gamma_1,\gamma_2\in G(F)$使得 $H(\gamma_1 g)\geqslant T$,$H(\gamma_2 g)\geqslant T$. 则 $\gamma=\gamma_2\gamma_1^{-1}$ 必属于 $P(F)$,即在

$P(F)\backslash G(F)$ 中 $\gamma_1=\gamma_2$. 因此对于任意一个 $g\in G(A_F)$，我们可找到惟一的一个 $\gamma\in P(F)\backslash G(F)$使得 $H(\gamma g)>1$，故对于 $T>1$ 有

$$\Lambda^T\varphi(g) = \varphi(g) - \varphi_N(\gamma g)\chi_T(H(\gamma g)).$$

如果 g 取遍 $G(A_F)$的一个紧子集 Ω，则我们只能得到有限多个上述的 γ. 因此 $H(\gamma g)$的值有上界且该上界仅依赖于 Ω. 故对给定紧子集 Ω，可取充分大的 T 使得

$$\Lambda^T\varphi(g) = \varphi(g),$$

对所有 $g\in\Omega$ 都成立. 此即是说当 $T\to+\infty$时 $\Lambda^T\varphi$ 在任何 $G(A_F)$ 的紧子集上一致收敛于 φ.

对于上半平面 $\mathfrak{H}$ 上的模形式来说，截算子的定义相当于将基本区域 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 分为两部分，在 $\mathrm{Im}(z)\leqslant T$ 的部分函数 φ 不变，$\Lambda^T\varphi=\varphi$. 而在 $\mathrm{Im}(z)\geqslant T$ 的部分，$\Lambda^T\varphi$ 等于 φ 减去 φ 对于 $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$的积分，即 φ减去其 Fourier 常数项. 如果 φ是一模形式，根据其 Fourier 展开式，我们可知 φ减去其 Fourier 常数项所得的新函数是 y 的一个速降函数. 在 GL(2)群上的满足一定条件自守形式中这个性质也成立.

截算子还有其他一些性质，如其是 $L^2(G(A_F),\omega)$上的连续 Hermit 算子：$(\Lambda^T\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_1,\Lambda^T\varphi_2)$，及一个正交投影算子：

$$((1-\Lambda^T)\varphi_1,\Lambda^T\varphi_2) = 0.$$

关于这些性质的证明可参阅参考文献[37]与[43].

§5 Eisenstein 级数

设 s 为任意复数，μ 与 ν 为 $F_A^\times$ 上的酉特征（即满足 $|\mu(a)|=|\nu(a)|=1$）. 定义一个 Hilbert 空间 $H(s,\mu,\nu)$，包括所有满足下列条件的 $G(A_F)$上的函数 ϕ：

$$\phi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}g\right)=\mu(a)\nu(b)\left|\frac{a}{b}\right|_{A_F}^{s+1/2}\phi(g),$$

$$a,b\in A_F^{\times},\ x\in A_F,\ g\in G(A_F),$$

及

$$\int_{K(A_F)}|\phi(k)|^2\mathrm{d}k<+\infty.$$

因所有 $H(s,\mu,\nu)$ 构成一个以 C 为基底的平凡全纯纤维丛，我们可将 $H(s,\mu,\nu)$ 等同于 $H(\mu,\nu)=H(0,\mu,\nu)$，使得任何一个 $\phi\in H(\mu,\nu)$ 都定义一个截面函数 $\phi(s,\mu,\nu)$ 使其在 $K(A_F)$ 上的限制函数不依赖于 s. 设 $\{\phi_\alpha\}(\alpha\in I)$ 为 $H(\mu,\nu)$ 的一个标准正交基，记 $\pi(s,\mu,\nu)$ 为群 $G(A_F)$ 在空间 $H(s,\mu,\nu)$ 通过右平移的作用. 当 s 为纯虚数的时候，这个群表示 $\pi(s,\mu,\nu)$ 为一酉表示.

对任意一个纤维丛 $H(s,\mu,\nu)$ 的截面函数 ϕ. 我们定义 Eisenstein 级数

$$E(g,\phi,s,\mu,\nu)=\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\phi(\gamma g,s).$$

这个级数在半平面 Re $s>1/2$ 上收敛且可解析延拓到整个复平面上. 简单来说，这个 Eisenstein 级数的解析延拓基本思路是用截算子将其表示为

$$E(g,\phi,s,\mu,\nu)=\Lambda^T E(g,\phi,s,\mu,\nu)+\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}E_N(\gamma g,\phi,s,\mu,\nu)\chi_T(H(\gamma g)).\tag{4}$$

由前所述，对于 $T>1$，上式右边和式中至多有一项非零. 对于这个非零项，以 g 替代该 γg，则

$$E_N(g,\phi,s,\mu,\nu)=\int_{N(F)\backslash N(A_F)}E(ng,\phi,s,\mu,\nu)\mathrm{d}n$$

$$=\int_{N(F)\backslash N(A_F)}\sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)}\phi(\xi ng,s)\mathrm{d}n.$$

根据 Bruhat 分解 $G(F)=P(F)\cup P(F)wN(F)$，其中 $w=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. 故 $P(F)\backslash G(F)=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\cup wN(F)$，于是

$$E_N(g,\phi,s,\mu,\nu)=\int_{N(F)\backslash N(\boldsymbol{A}_F)}\phi(ng,s)\mathrm{d}n+\int_{N(\boldsymbol{A}_F)}\phi(wng,s)\mathrm{d}n.$$

由于 $\phi(g,s)$对于 $N(\boldsymbol{A}_F)$左不变，取测度使 $\mathrm{vol}(F\backslash\boldsymbol{A}_F)=1$ 后上式右边第一项等于 $\phi(g,s)$. 对于上式右边第二项我们引进**缠结算子** $M(s)$的概念：

$M(s)$是一个从 $H(s,\mu,\nu)$到 $H(-s,\nu,\mu)$的算子，其定义为

$$M(s)\phi(g)=\int_{N(\boldsymbol{A}_F)}\phi(wng,s)\mathrm{d}n.$$

因此

$$E_N(g,\phi,s,\mu,\nu)=\phi(g,s)+M(s)\phi(g).$$

等号右边第一项为 s 的全纯函数，而第二项的解析延拓完全由缠结算子 $M(s)$的解析性质给出. 事实上，$M(s)$在复平面上只有单极点，其具体性质与证明可见参考文献[43].

对于(4)式右边第一项 $\Lambda^T E(g,\phi,s,\mu,\nu)$，我们可利用的最重要的性质是其平方可积，故可考虑

$$(\Lambda^T E(g,\phi,s_1,\mu,\nu),\Lambda^T E(g,\phi_2,\bar{s}_2,\bar{\mu},\bar{\nu})).$$

在确定了这个内积对 s_1 与 s_2 的解析性质后，我们就可以通过利用双重 Taylor 级数来确定 $\Lambda^T E(g,\phi,s,\mu,\nu)$的解析延拓了，详见[43]. 这样我们最终能得出 $E(g,\phi,s,\mu,\nu)$在 $\boldsymbol{C}$ 上是解析函数，仅在区间$\left[-\frac{1}{2},0\right)$与$\left(0,\frac{1}{2}\right]$中有对称的有限个单极点(见参考文献[44]). 在 $s=0$，这个 Eisenstein 级数有一可去奇点.

§6 核函数的谱分解

我们现在可以对作用在 $L^2(G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F),\omega)$上的积分算子

$$\rho_\omega(\varphi) = \int_{Z(A_F)\backslash G(A_F)} \varphi(g)\rho_\omega(g)\mathrm{d}g$$

进行谱分解. 我们把作用在尖点形式所构成的不变子空间 $L_0^2(G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F),\omega)$ 上的积分算子的核函数记作 $K_{\text{cusp}}^\varphi(h,g)$,把连续谱上的积分核函数记作 $K_{\text{cont}}^\varphi(h,g)$,而把在非尖点形式的离散谱上的积分核函数记作 $K_{\text{sp}}^\varphi(h,g)$,则核函数 $K^\varphi(h,g)$的谱分解为

$$K^\varphi(h,g) = K_{\text{cusp}}^\varphi(h,g) + K_{\text{cont}}^\varphi(h,g) + K_{\text{sp}}^\varphi(h,g).$$

如设 $P_{\text{cusp}}, P_{\text{cont}}$及 P_{sp}分别为 $L^2(G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F),\omega)$空间到不变子空间 L_0^2, L_{cont}^2及 L_{sp}^2的正交投影,则

$$(P_{\text{cusp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\text{cusp}})f(h) = \int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)} K_{\text{cusp}}^\varphi(h,g)f(g)\mathrm{d}g,$$

$$(P_{\text{cont}}\rho_\omega(\varphi)P_{\text{cont}})f(h) = \int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)} K_{\text{cont}}^\varphi(h,g)f(g)\mathrm{d}g,$$

$$(P_{\text{sp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\text{sp}})f(h) = \int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)} K_{\text{sp}}^\varphi(h,g)f(g)\mathrm{d}g.$$

我们在§5曾取$\{\phi_\alpha\}(\alpha\in I)$为 $H(\mu,\nu)$的一个标准正交基. 用这个标准正交基我们可得出 $K_{\text{cont}}(h,g)$的一个表达式(见参考文献[42],[37]):

$$K_{\text{cont}}^\varphi(h,g) = \frac{1}{4\pi}\sum_{\mu\nu=\omega}\sum_{\alpha,\beta\in I}\int_{-\infty}^{+\infty}(\pi(\mathrm{i}t,\mu,\nu)(\varphi)\phi_\beta,\phi_\alpha)$$
$$\times E(h,\phi_\alpha,\mathrm{i}t,\mu,\nu)\,\overline{E}(g,\phi_\beta,\mathrm{i}t,\mu,\nu)\mathrm{d}t.$$

为了说明这个表达式的收敛性,我们指出上式实际上对左右 $K(\boldsymbol{A}_F)$有限的函数 φ 成立,此刻上式右端的两个和式均只有有限个非零项,化为有限和. Arthur[42]指出上式右边为在由光滑、模中心紧支集、左右 $K(\boldsymbol{A}_F)$有限函数组成的空间上的一个连续线性泛函. 由于这个空间是 $C_c^\infty(G(\boldsymbol{A}_F),\omega)$的一个稠密子空间,我们可以把上式右边扩展为空间 $C_c^\infty(G(\boldsymbol{A}_F),\omega)$上的一个连续线性泛函. 这也就是 K_{cont}^φ这个表达式的意义.

具体来说，对于 $C_c^{\infty}(G(\boldsymbol{A}_F),\omega)$ 中函数 $\varphi=\coprod_v \varphi_v$，其非 Archimedes 局部函数 φ_v 为局部常数并有模中心紧支集，故为左右 $K(F_v)$ 有限. 因此对 φ 左右 $K(\boldsymbol{A}_F)$ 有限的要求仅限于其 Archimedes 局部函数 φ_v. 当 $F=\boldsymbol{Q}$ 时，φ 的 Archimedes 局部函数 $\varphi_{\boldsymbol{R}}$ 具有一致收敛的左右 Fourier 级数

$$\varphi_{\boldsymbol{R}}(g)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{l,n\in\boldsymbol{Z}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{\boldsymbol{R}}(r(\theta_1)gr(\theta_2))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\theta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta_2}\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2,$$

其中 $r(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. 这个级数的任意有限部分和均为左右 $K(\boldsymbol{R})$有限的. 以此 Fourier 级数代入 $K_{\mathrm{cont}}^{\varphi}$的表达式中即可得到上述的连续线性泛函的扩展过程.

根据参考文献[37]，核函数 $K_{\mathrm{sp}}^{\varphi}$的表达式如下：

$$K_{\mathrm{sp}}^{\varphi}(h,g)=(\mathrm{vol}(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F))^{-1}$$

$$\times\sum_{\chi^2=\omega}\chi(\det h)\,\overline{\chi}(\det g)\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\varphi(y)\,\overline{\chi}(\det y)\mathrm{d}y.$$

为了得到尖点核函数 $K_{\mathrm{cusp}}^{\varphi}$的表达式，我们回过头来看 $G(\boldsymbol{A}_F)$ 在 $L^2(G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F),\omega)$上的群表示 ρ_ω. 在 $L_0^2(G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F),\omega)$上 ρ_ω 可以被分解为不可约自守尖点表示 σ 的直和，即 $L_0^2(G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F),\omega)$可被分解为不变子空间的直和，而 ρ_ω 在每一个这样的不变子空间上均为不可约自守尖点表示. 设 V 为这样的一个不变子空间，记其上的不可约自守尖点表示为 σ. 取 S 为域 F 的不同赋值所组成的一个有限集合并假定 S 包含所有的 Archimedes 赋值. 对于给定的 σ，根据限制乘积的定义，我们总可找到一个足够大的有限集合 S 使得 σ 作为 $K^S=\coprod_{v\notin S}K(F_v)$的一个群表示包含 K^S 的单位表示. (σ 是 $G(\boldsymbol{A}_F)$的不可约表示，但作为 K^S 的表示，σ 就不一定仍是不可约的了. 设 σ 可以分解成 K^S 的不可约表示的直和，则其中一个不可约表示为 K^S 的单位表示.) 下面的讨论中，我们取一个固定的集合 S，而且只考虑 ρ_ω 所有包含 K^S 单位表示

的不可约自守尖点表示 σ. 对于这样一个表示 σ, 记其空间为 $V(\sigma)$. 取 $V_S(\sigma)$ 为由 $V(\sigma)$ 中所有在 K^S 作用下不变的向量(即线性形式)组成的 $V(\sigma)$ 的子空间.

可以看出, $V_S(\sigma)$ 在群 $G(F_S)=\prod_{v\in S}G(F_v)$ 作用下不变.

记群 $G(F_S)$ 在 $V_S(\sigma)$ 上的表示为 σ_S. 我们可将函数 φ 写为 $\varphi=\varphi_S\varphi^S$, 其中 $\varphi_S=\prod_{v\in S}\varphi_v$, $\varphi^S=\prod_{v\notin S}\varphi_v$. 设所有 $v\notin S$ 的 φ_v 均为左右 $K(F_v)$ 不变. 这样的 φ_v 被称为球面函数. 由于函数 φ_v 左右 $K(F_v)$ 不变, 对任意 $K(F_v)$ 右不变的函数 f_v 来说, 函数 $\sigma_v(\varphi_v)f_v(h)=\int_{Z(F_v)\backslash G(F_v)}\varphi_v(g_v)f_v(hg_v)\mathrm{d}g_v$ 也在 $K(F_v)$ 下右不变. 故对以上所取的函数 φ, $\sigma(\varphi)$ 将 $V_S(\sigma)$ 映到 $V_S(\sigma)$ 自身. 由于 σ 是 $V(\sigma)$ 的不可约表示, $\sigma(\varphi^S)$ 在 $V_S(\sigma)$ 上的作用为

$$\sigma(\varphi^S)f=\hat{\sigma}(\varphi^S)\cdot f,$$

其中 $\hat{\sigma}$ 为所有 φ^S 组成的 Hecke 代数到 $C^\times$ 上的一个同态. $\hat{\sigma}$ 被称为对应于群表示 σ 的 Hecke 代数的**特征**.

通过这些准备, 我们可得到

$$\sigma(\varphi)f=\hat{\sigma}(\varphi^S)\cdot\sigma_S(\varphi_S)f,$$

其中 $f\in V_S(\sigma)$, φ_v 左右 $K(F_v)$ 不变, $v\notin S$. 取 $V_S(\sigma)$ 的一组标准正交基 $\{\Phi_\alpha\}(\alpha\in J)$, 则尖点核函数可以表示为(见参考文献 [45]):

$$K_{\text{cusp}}^{\varphi}(h,g)=\sum_{\sigma}\hat{\sigma}(\varphi^S)\sum_{\alpha\in J}\sigma_S(\varphi_S)\Phi_\alpha(h)\overline{\Phi}_\alpha(g).$$

注意这里对不同的 S 我们得到不同的 $K_{\text{cusp}}^{\varphi}$ 的展开式.

§7 迹公式中的截算子

利用核函数的谱分解, 我们有

$$K_{\text{cusp}}^{\varphi}(h,g)=K^{\varphi}(h,g)-K_{\text{cont}}^{\varphi}(h,g)-K_{\text{sp}}^{\varphi}(h,g).$$

但是为了计算迹类算子 $P_{\mathrm{cusp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\mathrm{cusp}}$的迹，我们不能对上式逐项积分，因积分不收敛. 为此我们再次利用截算子. 由于在 $K^\varphi_{\mathrm{cusp}}$的展开式中$\overline{\Phi}_\alpha$ 为尖点形式，截算子对 $K^\varphi_{\mathrm{cusp}}$第二个变量作用的像仍然是 $K^\varphi_{\mathrm{cusp}}$：$\Lambda_2^T K^\varphi_{\mathrm{cusp}}=K^\varphi_{\mathrm{cusp}}$. 因此

$$K^\varphi_{\mathrm{cusp}}(h,g)=\Lambda_2^T K^\varphi(h,g)-\Lambda_2^T K^\varphi_{\mathrm{cont}}(h,g)-\Lambda_2^T K^\varphi_{\mathrm{sp}}(h,g).$$

这样逐项积分成为可能：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(P_{\mathrm{cusp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\mathrm{cusp}})&=\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}K^\varphi_{\mathrm{cusp}}(x,x)\mathrm{d}x\\&=\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\Lambda_2^T K^\varphi(x,x)\mathrm{d}x-\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\Lambda_2^T K^\varphi_{\mathrm{cont}}(x,x)\mathrm{d}x\\&\quad-\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\Lambda_2^T K^\varphi_{\mathrm{sp}}(x,x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里最容易计算的部分为 $\Lambda_2^T K^\varphi_{\mathrm{sp}}$的积分. 利用 K^φ_{sp}的表达式

$$\begin{aligned}\Lambda_2^T K^\varphi_{\mathrm{sp}}(h,g)&=\mathrm{vol}(Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F))^{-1}\sum_{\chi^2=\omega}\chi(\det h)\,\overline{\chi}(\det g)\\&\quad\times\Big(1-\mathrm{vol}(F\backslash\mathbf{A}_F)\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\chi_T(H(\gamma g))\Big)\\&\quad\times\int_{Z(\mathbf{A}_F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\varphi(y)\,\overline{\chi}(\det y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\Lambda_2^T K^\varphi_{\mathrm{sp}}(x,x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{\chi^2=\omega}\Big(1-\frac{\mathrm{vol}(F\backslash\mathbf{A}_F)}{\mathrm{vol}(Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F))}\\&\quad\times\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\chi_T(H(\gamma x)\mathrm{d}x\Big)\\&\quad\times\int_{Z(\mathbf{A}_F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\varphi(y)\,\overline{\chi}(\det y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由前所述对于任何 x，和式 $\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}$ 至多有一个非零项，故被积函

数有界. 因此

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\Lambda_2^T K_{\mathrm{sp}}^{\varphi}(x,x)\mathrm{d}x=\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}K_{\mathrm{sp}}^{\varphi}(x,x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{\chi^2=\omega}\int_{Z(\mathbf{A}_F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\varphi(y)\,\overline{\chi}(\det y)\mathrm{d}y.$$

回忆积分算子 $\rho_\omega(\varphi)$ 的离散谱由 $P_{\mathrm{cusp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\mathrm{cusp}}$ 和 $P_{\mathrm{sp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\mathrm{sp}}$ 组成, 我们因此得到 $\rho_\omega(\varphi)$ 在离散谱上的迹

$$\mathrm{tr}(P_{\mathrm{cusp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\mathrm{cusp}})+\mathrm{tr}(P_{\mathrm{sp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\mathrm{sp}})$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\left(\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\Lambda_2^T K^{\varphi}(x,x)\mathrm{d}x-\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\Lambda_2^T K_{\mathrm{cont}}^{\varphi}(x,x)\mathrm{d}x\right).$$

这就是迹公式, 其等号右边第一项可称为迹公式的**几何部分**, 第二项则被称为**连续谱部分**.

§8 迹公式的几何部分

为了计算

$$\Lambda_2^T K^{\varphi}(x,x)=\sum_{\gamma\in Z(F)\backslash G(F)}\varphi(x^{-1}\gamma x)-\sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)}\chi_T(H(\xi x))$$

$$\times\int_{N(F)\backslash N(\mathbf{A}_F)}\sum_{\gamma\in Z(F)\backslash G(F)}\varphi(x^{-1}\xi^{-1}\gamma n\xi x)\mathrm{d}n$$

的积分 (这里我们以 $\xi^{-1}\gamma$ 替换了 γ), 我们考虑 $G(F)$ 中不同类型的共轭等价类: (1) 单位矩阵 $e\in Z(F)\backslash G(F)$ 自成一共轭等价类; (2) γ 被称为 F-双曲正则元素, 如果 γ 在 $G(F)$ 作用下共轭于 $\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}$, $a\in F^\times$, $a\neq1$; (3) γ 被称为 F-幂零元素, 如果 γ 在 $G(F)$ 下共轭于 $\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}$, $x\in F^\times$; (4) γ 被称为 F-椭圆元素, 如果 γ 在 $G(F)$ 下不共轭于 $P(F)$ 中任意矩阵. 如此, 则

$$
\begin{aligned}
\Lambda_2^T K(x,x) = \varphi(e) &+ \sum_{\gamma\ F\text{-椭圆}} \varphi(x^{-1}\gamma x) \\
&+ \sum_{\gamma\ F\text{-幂幺}} \varphi(x^{-1}\gamma x) - \sum_{\xi \in P(F)\backslash G(F)} \int_{N(A_F)} \varphi(x^{-1}\xi^{-1} n \xi x) \\
&\times \chi_T(H(\xi x)) \mathrm{d}n \\
&+ \sum_{\gamma\ F\text{-双曲正则}} \varphi(x^{-1}\gamma x) \\
&- \sum_{\xi \in P(F)\backslash G(F)} \int_{N(A_F)} \sum_{\substack{a \in F^\times \\ a \neq 1}} \varphi\left(x^{-1}\xi^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} n \xi n \right) \chi_T(H(\xi x)) \mathrm{d}n.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

以上的轨道分解的意义在于，(5)式右边的每一行都对 $x \in Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)$ 可积分. 对于(5)式右边第一行的 $\varphi(e)$，其积分等于

$$\mathrm{vol}(Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F))\varphi(e).$$

(5)式右边第一行的和式可积分是因为对任意椭圆元素 γ 来说，$\varphi(x^{-1}\gamma x)$ 是 $x \in Z(A_F)\backslash G(A_F)$的一个有紧支集的函数. 为证明这个推断，我们设 $\varphi(x^{-1}\gamma x) \neq 0$，即 $x^{-1}\gamma x \in \Omega$，其中 Ω 为 φ的紧致支集. 由 Iwasawa 分解可将 x 写成 $x = \beta k$，$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & * \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \in P(A_F)$，$k \in K(A_F)$，故 $\beta^{-1}\gamma\beta \in \Omega_1$，其中 $\Omega_1 = K(A_F)\Omega K(A_F)$仍为 $G(A_F)$ 的紧子集. 设 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(F)$ 为一椭圆元素，则 $\beta^{-1}\gamma\beta = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{\beta_1 c}{\beta_2} & * \end{pmatrix}$. 故$\frac{\beta_1 c}{\beta_2}$属于 A_F 的一个紧子集. 由于 γ 为椭圆元素，$c \neq 0$，我们推得$\left|\frac{\beta_1 c}{\beta_2}\right|_A = \left|\frac{\beta_1}{\beta_2}\right|_A$ 小于某一正常数.

我们引进 Siegel 区域的概念：一个 Siegel 区域为包含下列元素的集合

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tab & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} k,$$

其中 x 属于 $\mathbf{A}_F$ 的一紧子集，$a\in\mathbf{A}_F^\times$，b 属于 $\mathbf{A}_F^\times$ 的一紧子集，$k\in K(\mathbf{A}_F)$，$t=\prod_v t_v\in\mathbf{A}_F^\times$，对所有非 Archimedes v，$t_v=1$，而对所有 Archimedes v，t_v 均等于同一个正实数 $n>c$，$c>0$. 可以证明对充分大的 Siegel 区域 S，有 $G(\mathbf{A}_F)=G(F)S$.

设上面取的 x 属于这样的一个 Siegel 区域，则 $\left|\frac{\beta_1}{\beta_2}\right|_{\mathbf{A}_F}$ 有上界的条件推出 x 属于一模中心紧致的集合，故(5)式右边第一行的和式对于 $x\in Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$ 有紧支集. 由此可证明我们的推断.

对于(5)式右边第二行的式子，我们可设 $\gamma=\xi^{-1}\begin{pmatrix}1&\eta\\0&1\end{pmatrix}\xi$，$\xi\in P(F)\backslash G(F)$，$\eta\in F^\times$，则(5)式右边第二行的式子变为

$$\sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)}\left(\sum_{\eta\in F^\times}\varphi\left(x^{-1}\xi^{-1}\begin{pmatrix}1&\eta\\0&1\end{pmatrix}\xi x\right)\right.$$
$$\left.-\int_{N(\mathbf{A}_F)}\varphi(x^{-1}\xi^{-1}n\xi x)\chi_T(H(\xi x))\mathrm{d}n\right).$$

故其在 $Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$ 上的积分等于

$$\int_{Z(\mathbf{A}_F)P(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\left(\sum_{\eta\in F^\times}\varphi\left(x^{-1}\begin{pmatrix}1&\eta\\0&1\end{pmatrix}x\right)\right.$$
$$\left.-\int_{\mathbf{A}_F}\varphi\left(x^{-1}\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}x\right)\chi_T(H(x))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

记 $F(y)=\int_{K(\mathbf{A}_F)}\varphi\left(k^{-1}\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}k\right)\mathrm{d}k$，则 $F(x)$ 为一个 $\mathbf{A}_F$ 上的 Schwartz-Bruhat 函数. 用 Iwasawa 分解可将 $x\in Z(\mathbf{A}_F)P(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$ 写为 $x=\begin{pmatrix}1/a&0\\0&1\end{pmatrix}nk$，其中 $a\in F^\times\backslash\mathbf{A}_F^\times$，$n\in N(F)\backslash N(\mathbf{A}_F)$，$k\in K(\mathbf{A}_F)$，于是 $\mathrm{d}x=|a|_{\mathbf{A}_F}\mathrm{d}^\times a\mathrm{d}n\mathrm{d}k$. 故上式等于

$$\mathrm{vol}(F\backslash\mathbf{A}_F)\int_{F^\times\backslash\mathbf{A}_F^\times}|a|_{\mathbf{A}_F}\mathrm{d}^\times a\left[\sum_{\eta\in F^\times}\int_{K(\mathbf{A}_F)}\varphi\left(k^{-1}\begin{pmatrix}1&a\eta\\0&1\end{pmatrix}k\right)\mathrm{d}k\right.$$

$$-\int_{A_F}\mathrm{d}u\int_{K(A_F)}\varphi\left(k^{-1}\begin{pmatrix}1 & au\\ 0 & 1\end{pmatrix}k\right)\cdot\chi_T(|a|_{A_F}^{-1})\mathrm{d}k\Bigg]$$

$$=\mathrm{vol}(F\backslash A_F)\int_{F^\times\backslash A_F^\times}\Big(\sum_{\eta\in F^\times}F(a\eta)$$

$$-\hat{F}(0)\chi_T(|a|_{A_F}^{-1})|a|_{A_F}^{-1}\Big)|a|_{A_F}\mathrm{d}^\times a,$$

其中 $\mathrm{vol}(F\backslash A_F)=1$，$\hat{F}(x)=\int_{A_F}F(y)\psi(xy)\mathrm{d}y$ 为函数 $F(y)$ 的 Fourier 变换，ψ 为 A_F 上的一个特征，ψ 在 F 上恒等于 1.

为了计算这个积分，我们先分出某些可积部分. 由于 $F(x)$ 是一个 A_F 上的 Schwartz-Bruhat 函数，

$$\int_{\substack{a\in F^\times\backslash A_F^\times\\ |a|_{A_F}\geqslant 1}}\sum_{\eta\in F^\times}F(a\eta)|a|_{A_F}\mathrm{d}^\times a=\int_{\substack{a\in A_F^\times\\ |a|_{A_F}\geqslant 1}}F(a)|a|_{A_F}\mathrm{d}^\times a$$

收敛. 去掉这个收敛积分后所剩部分为

$$\int_{F^\times\backslash A_F^\times}\Big(\sum_{\eta\in F^\times}F(a\eta)|a|_{A_F}(1-\chi_1(|a|_{A_F}))$$

$$-\hat{F}(0)\chi_T(|a|_{A_F}^{-1})\Big)\mathrm{d}^\times a.$$

根据 Poisson 求和公式，

$$\sum_{\eta\in F^\times}F(a\eta)=\sum_{\eta\in F}F(a\eta)-F(0)$$

$$=\sum_{\eta\in F}\hat{F}(a^{-1}\eta)|a|_{A_F}^{-1}-F(0)$$

$$=\sum_{\eta\in F^\times}\hat{F}(a^{-1}\eta)|a|_{A_F}^{-1}+\hat{F}(0)|a|_{A_F}^{-1}-F(0),$$

我们又可分出

$$\int_{\substack{a\in F^\times\backslash A_F^\times\\ |a|_{A_F}<1}}\sum_{\eta\in F^\times}\hat{F}(a^{-1}\eta)\mathrm{d}^\times a=\int_{\substack{a\in A_F^\times\\ |a|_{A_F}>1}}\hat{F}(a)\mathrm{d}^\times a,$$

其为收敛积分，因为$\hat{F}(x)$亦为 Schwartz-Bruhat 函数，所剩部分现在为

$$-F(0)\int\limits_{\substack{a\in F^{\times}\backslash \mathbb{A}_F^{\times}\\ |a|_{\mathbb{A}_F}<1}} |a|_{\mathbb{A}}\mathrm{d}^{\times}a+\hat{F}(0)\int_{1/T<|a|_{\mathbb{A}}<1}\mathrm{d}^{\times}a.$$

此两积分均收敛，因此这也证明了(5)式第二行幂零部分可积分.

上式第二个积分等于

$$\hat{F}(0)\int\limits_{\substack{a\in F^{\times}\backslash \mathbb{A}_F^{\times}\\ \frac{1}{T}<|a|_{\mathbb{A}}<1}}\mathrm{d}^{\times}a=(\log T)\hat{F}(0)\mathrm{vol}(F^{\times}\backslash \mathbb{A}_F^{1}).$$

因此(5)式第二、第三行式子的积分等于

$$\int\limits_{\substack{a\in \mathbb{A}_F^{\times}\\ |a|_{\mathbb{A}_F}\geqslant 1}}F(a)|a|_{\mathbb{A}_F}\mathrm{d}^{\times}a-\int\limits_{\substack{a\in \mathbb{A}_F^{\times}\\ |a|_{\mathbb{A}_F}>1}}\hat{F}(a)\mathrm{d}^{\times}a$$

$$-F(0)\int\limits_{\substack{a\in F^{\times}\backslash \mathbb{A}_F^{\times}\\ |a|_{\mathbb{A}_F}<1}}|a|_{\mathbb{A}_F}\mathrm{d}^{\times}a+(\log T)\hat{F}(0)\mathrm{vol}(F^{\times}\backslash \mathbb{A}_F^{1}).$$

用类似的方法我们也可证明(5)式右边第四、第五行的积分收敛，其值等于

$$(\log T)\mathrm{vol}(F^{\times}\backslash \mathbb{A}_F^{1})\int_{K(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F}\sum_{\substack{a\in F^{\times}\\ a\neq 1}}\varphi\left(k^{-1}\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}k\right)\mathrm{d}k\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{vol}(F^{\times}\backslash \mathbb{A}_F^{1})\int_{K(\mathbb{A}_F)}\int_{\mathbb{A}_F}\sum_{\substack{a\in F^{\times}\\ a\neq 1}}\varphi\left(k^{-1}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}k\right)$$

$$\times\log H\left(\omega\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}k\right)\mathrm{d}k\mathrm{d}x.$$

将上述结果相加，我们就得到迹公式的几何部分(具体计算可参阅参考文献[37]与[43])：

$$
\begin{aligned}
\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} \Lambda_2^T K(x,x)\mathrm{d}x &= \mathrm{vol}(Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F))\varphi(e) \\
&\quad + \int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} \sum_{\gamma\text{椭圆元素}} \varphi(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x \\
&\quad + (\log T)\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbf{A}_F^1)\int_{K(\mathbf{A}_F)}\int_{N(\mathbf{A}_F)}\sum_{a\in F^\times}\varphi\left(k^{-1}\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}nk\right)\mathrm{d}n\mathrm{d}k \\
&\quad - \frac{1}{2}\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbf{A}_F^1)\int_{K(\mathbf{A}_F)}\int_{N(\mathbf{A}_F)}\sum_{\substack{a\in F^\times\\ a\neq 1}}\varphi\left(k^{-1}n^{-1}\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}nk\right) \\
&\qquad \times \log H(\omega nk)\mathrm{d}n\mathrm{d}k \\
&\quad + \int_{\substack{a\in\mathbf{A}_F^\times\\ |a|_{\mathbf{A}_F}\geqslant 1}} F(a)|a|_{\mathbf{A}_F}\mathrm{d}^\times a - \int_{\substack{a\in\mathbf{A}_F^\times\\ |a|_{\mathbf{A}_F}>1}} \hat{F}(a)\mathrm{d}^\times a \\
&\quad - F(0)\int_{\substack{a\in F^\times\backslash\mathbf{A}_F^\times\\ |a|_{\mathbf{A}_F}<1}} |a|_{\mathbf{A}_F}\mathrm{d}^\times a.
\end{aligned}
$$

§9 迹公式的最后形式

我们同样略去 $\Lambda_2^T K_{\mathrm{cont}}^{\varphi}(x,x)$ 的积分的计算，读者可参阅文献[37]或[43]，本文不再重复. 在此我们只列出最后的计算结果.

$$
\begin{aligned}
&\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} \Lambda_2^T K_{\mathrm{cont}}^{\varphi}(x,x)\mathrm{d}x \\
&\quad = -(\log T)\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbf{A}_F^1) \\
&\qquad \times \int_{K(\mathbf{A}_F)}\int_{N(\mathbf{A}_F)}\sum_{a\in F^\times}\varphi\left(k^{-1}\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}nk\right)\mathrm{d}n\mathrm{d}k \\
&\qquad + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{tr}(M(-\mathrm{i}y)M'(\mathrm{i}y)\pi_{\mathrm{i}y}(\varphi))\mathrm{d}y \\
&\qquad - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(M(0)\pi_0(\varphi)),
\end{aligned}
$$

其中缠结算子 $M(s)$的定义见§5，而 $M'(s)\varphi=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}M(s)\varphi$.

根据这些计算结果，迹公式可以写为

$$\int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)} K^{\varphi}_{\mathrm{cusp}}(x,x)\mathrm{d}x + \int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)} K^{\varphi}_{\mathrm{sp}}(x,x)\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{vol}(Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F))\varphi(e)$$

$$+ \int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)} \sum_{\gamma\text{椭圆}} \varphi(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{\substack{a\in A_F^\times \\ |a|_{A_F}\geqslant 1}} F(a)|a|_{A_F}\mathrm{d}^\times a - \int_{\substack{a\in A_F^\times \\ |a|_{A_F}>1}} \hat{F}(a)\mathrm{d}^\times a$$

$$- F(0)\int_{\substack{a\in F^\times\backslash A_F^\times \\ |a|_{A_F}<1}} |a|_{A_F}\mathrm{d}^\times a$$

$$- \frac{1}{2}\mathrm{vol}(F^\times\backslash A_F^1)\int_{K(A_F)}\int_{N(A_F)} \sum_{\substack{a\in F^\times \\ a\neq 1}} \varphi\left(k^{-1}n^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} nk\right)$$

$$\times \log H(\omega nk)\mathrm{d}n\mathrm{d}k$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{tr}\left(M(-\mathrm{i}y)M'(\mathrm{i}y)\pi_{\mathrm{i}y}(\varphi)\right)\mathrm{d}y$$

$$- \frac{1}{4}\mathrm{tr}(M(0)\pi_0(\varphi)),$$

其中上式右边含有 $\log T$ 的项互相抵消了. 上式右边后五行的式子尚需更进一步的计算，这冗长的计算的目的是证明这些式子都可以写成包含不同局部积分

$$\int_{A(F_v)\backslash G(F_v)} \varphi_v\left(g^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right)\mathrm{d}g, \quad a\neq 1$$

或其极限的乘积，其中

$$G(F_v) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in F_v, ad-bc\neq 0\right\},$$

$$A(F_v) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, d \in F_v^\times \right\}.$$

因此我们得到以下经过化简了的迹公式.

定理 设 $\varphi = \prod_v \varphi_v$ 为一个在 $G(\mathbf{A}_F)$上满足

$$\varphi(zg) = \omega^{-1}(z)\varphi(g), \quad z \in Z(\mathbf{A}_F), g \in G(\mathbf{A}_F)$$

的无穷次可微有模中心紧支集的函数. 又设存在两个局部域 F_{v_1}与 F_{v_2}, $v_1 \neq v_2$, 其上的局部函数 φ_{v_1}与 φ_{v_2}满足

$$\int_{A(F_v)\backslash G(F_v)} \varphi_v\left(g^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \mathrm{d}g = 0, \quad a \neq 1, v = v_1, v_2,$$

则积分算子 $\rho_\omega(\varphi)$在离散谱上的迹等于

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}(P_{\mathrm{cusp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\mathrm{cusp}}) + \operatorname{tr}(P_{\mathrm{sp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\mathrm{sp}}) \\ &\quad = \operatorname{vol}(Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F))\varphi(e) \\ &\qquad + \int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)} \sum_{\gamma \text{椭圆}} \varphi(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

§10 四元数代数

GL(2)上的迹公式的一个重要应用是证明 GL(2)群表示与四元数代数的可逆元素组成的乘法群的表示之间的关系. 这项工作首先由 Jacquet 及 Langlands 在文献[46]中完成,是模形式、群表示理论中的一个重要里程碑(Jacquet 及 Langlands 的著作[46]篇幅较大,读者可先参考 Godement 的著作 [47]). 之后 Gelbart[35] 与 Gelbart, Jacquet[37]把这项结果又重新阐述了. 本节仅对此特别是与迹公式有关部分作一入门介绍,有兴趣的读者可直接阅读上述文献.

设 D 为一个在数域 F 上的四元数代数, D 的中心为 F. 在局部域 F_v 上,我们设 $D(F_v) = D \otimes_F F_v$. 如果 $D(F_v)$仍然是一个四元数代数,我们称 D 在 F_v 上不分裂. 如果 $D(F_v)$不是一个四元数代

数，则存在一个从 $D(F_v)$ 到 $M(2,F_v)$ 的自然同构，我们称这时 D 在 F_v 上分裂. 设 S 为所有 D 在 F_v 上不分裂的 v 所组成的集合，并假定 S 不包含 Archimedes 赋值 v，则可以证明 S 为有限集合并至少包含两个元素，详细论证见参考文献[31]. 记 D 的乘法群为 G'，其中心为 Z'，对于 $G'(F)$ 来说，$Z'(F)$ 同构于 $F^\times$. 在局部的情形，对于 $v\notin S$，$G'(F_v)$ 与 $G(F_v)=\mathrm{GL}(2,F_v)$ 同构.

与本章开始一样，我们考虑 $G'(\mathbf{A}_F)$ 上的函数 f'，其满足条件

$f'(\gamma zg)=\omega(z)f'(g),\quad \gamma\in G'(F),\ z\in Z'(\mathbf{A}_F), g\in G'(\mathbf{A}_F)$，

及

$$\int_{Z'(\mathbf{A}_F)G'(F)\backslash G'(\mathbf{A}_F)}|f'(g)|^2\mathrm{d}g<+\infty.$$

这些函数组成空间 $L^2(G'(F)\backslash G'(\mathbf{A}_F),\omega)$. 记 ρ'_ω 为群 $G'(\mathbf{A}_F)$ 在 $L^2(G'(F)\backslash G'(\mathbf{A}_F),\omega)$ 上右平移作用所导出的群表示：

$$\rho'_\omega(g)f'(h)=f'(hg).$$

又设 $\varphi'=\prod_v\varphi'_v$ 为一个 $G'(\mathbf{A}_F)$ 上的无穷次可微模中心紧支集函数，满足

$$\varphi'(zg)=\omega^{-1}(z)\varphi'(g),\quad z\in Z'(\mathbf{A}_F),\quad g\in G'(\mathbf{A}_F).$$

这里 $\prod_v\varphi'_v$ 为限制乘积，即对于除有限个 v 外都有

$$\varphi'_v(g_v)=\begin{cases}\omega_v^{-1}(z_v), & \text{如 } g_v=k_vz_v, k_v\in K(F_v), z_v\in Z(F_v),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则我们可定义积分算子 $\rho'_\omega(\varphi')$ 如下：

$$\rho'_\omega(\varphi')f'(h)=\int_{G'(\mathbf{A})}\varphi'(g)f'(hg)\mathrm{d}g=\int_{G'(\mathbf{A})}\varphi'(h^{-1}g)f'(g)\mathrm{d}g.$$

由于 f' 在 $G'(F)$ 下左不变，我们得到 $\rho'_\omega(\varphi')$ 的积分核函数

$$K'(h,g)=\sum_{\gamma\in Z'(F)\backslash G'(F)}\varphi'(h^{-1}\gamma g),$$

而

$$\rho'_\omega(\varphi')f'(h)=\int_{Z'(\mathbf{A}_F)G'(F)\backslash G'(\mathbf{A}_F)}K'(h,g)f'(g)\mathrm{d}g.$$

以上所引进的概念与GL(2)的情形类似，但最根本的差别是$Z'(\boldsymbol{A}_F)G'(F)\backslash G'(\boldsymbol{A}_F)$紧致. 因此，从$K'(h,g)$连续可推知$\rho'_\omega(\phi)$为 Hilbert-Schmidt 类. 又由参考文献[38]，无穷次可微函数ϕ可表为卷积的有限和. 故$\rho'_\omega(\phi)$又为迹类算子，其迹等于

$$\operatorname{tr}(\rho'_\omega(\phi)) = \int_{Z'(\boldsymbol{A}_F)G'(F)\backslash G'(\boldsymbol{A}_F)} K'(x,x)\mathrm{d}x.$$

为了计算上式右边的积分，我们首先分出$\gamma=e$的项：

$$\operatorname{tr}(\rho'_\omega(\phi)) = \operatorname{vol}(Z'(\boldsymbol{A}_F)G'(F)\backslash G'(\boldsymbol{A}_F))\phi(e) + \int_{Z'(\boldsymbol{A}_F)G'(F)\backslash G'(\boldsymbol{A}_F)} \sum_{\substack{\gamma\in Z'(F)\backslash G'(F)\\ \gamma\neq e}} \phi(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x.$$

由于G'为四元数代数的乘法群，对任意$\gamma\in G'(F)$，$\gamma\notin Z'(F)=F^\times$，$L=F(\gamma)$为一个$F$的二次扩域. 如果$\gamma=x^{-1}\gamma_1 x$，则$\gamma_1$生成的二次扩域$L_1$与$L$作为代数是$F$-同构的. 故我们可取所有$F$这样的二次扩域的等价类的一个代表系$X'$，而将上式右边的积分写成

$$\sum_{L\in X'}(g_L)^{-1}\sum_{\substack{\xi\in L^\times/F^\times\\ \xi\neq e}}\int_{Z'(\boldsymbol{A}_F)L^\times\backslash G'(\boldsymbol{A}_F)}\phi(x^{-1}\xi x)\mathrm{d}x,$$

其中g_L为L上F自同构的个数，即$g_L=2$. 由于L中的乘法有交换性，算子$\rho'_\omega(\phi)$的迹等于

$$\operatorname{tr}(\rho'_\omega(\phi)) = \operatorname{vol}(Z'(\boldsymbol{A}_F)G'(F)\backslash G'(\boldsymbol{A}_F))\phi(e) + \frac{1}{2}\sum_{L\in X'}\operatorname{vol}(\boldsymbol{A}_F^\times L^\times\backslash\boldsymbol{A}_L^\times)\sum_{\substack{\xi\in L^\times/F^\times\\ \xi\neq e}}\int_{\boldsymbol{A}_L^\times\backslash G'(\boldsymbol{A}_F)}\phi(x^{-1}\xi x)\mathrm{d}x.$$

§11　迹公式的比较

为了得到G上的群表示与G'上的群表示的关系，我们要比较对应积分算子的迹，即给定φ，我们要找到满足某些条件的函数ϕ，使得

$$\operatorname{tr}(P_{\text{cusp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\text{cusp}}) + \operatorname{tr}(P_{\text{sp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\text{sp}}) = \operatorname{tr}(\rho'_\omega(\phi)).$$

反之，给定 ϕ'，我们亦要找到满足某些条件的函数 φ，使上式成立.

设函数 $\varphi=\prod_v \varphi_v$ 满足 § 9 结尾处的条件，即存在两个不同的局部域 F_v，在其上对任意 $a\neq 1$，有

$$\int_{A(F_v)\backslash G(F_v)} \varphi_v\left(g^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\mathrm{d}g = 0.$$

用 G 上的迹公式的简化形式，我们需要证明

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}(Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F))\varphi(e) \\
&\quad +\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)} \sum_{\gamma\text{椭圆}} \varphi(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{vol}(Z'(\boldsymbol{A}_F)G'(F)\backslash G'(\boldsymbol{A}_F))\phi'(e) \\
&\quad +\sum_{L\in X'} (g_L)^{-1}\mathrm{vol}(\boldsymbol{A}_F^{\times}L^{\times}\backslash \boldsymbol{A}_L^{\times}) \sum_{\substack{\xi\in L^{\times}/F^{\times} \\ \xi\neq e}} \int_{\boldsymbol{A}_L^{\times}\backslash G'(\boldsymbol{A}_F)} \phi'(x^{-1}\xi x)\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{6}$$

如果我们在 G 与 G' 上选用适当的测度(例如 Tamagawa 测度，见参考文献[48])，则

$$\mathrm{vol}(Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)) = \mathrm{vol}(Z'(\boldsymbol{A}_F)G'(F)\backslash G'(\boldsymbol{A}_F)),$$

故我们可设 $\varphi(e)=\phi'(e)$.

为了使(6)式左右两边第二式相等，我们先将左边第二式改写成类似右边的形式. γ 作为一个椭圆元素，其在 $G(F)$ 下不共轭于 $P(F)$ 中任意矩阵，即 γ 在 F 上没有特征值. 设 E 为 γ 的特征多项式的根所生成的 F 的二次扩域，则 E 是 F-同构于 γ 在 $G(F)$ 中的中心化子(的中心). 我们以下将此中心化子简单记作 $E\subset M(2,F)$. 如果 $\gamma=x^{-1}\gamma_1 x$，则 γ_1 的中心化子 E_1 与 E 是 F-同构的. 因此我们可取 $G(F)$ 中所包含的这种二次扩域的同构类的一个代表系 $\boldsymbol{X}$，则

$$\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)} \sum_{\gamma\text{椭圆}} \varphi(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{E\in X}\mathrm{vol}(\boldsymbol{A}_F^\times E^\times \backslash \boldsymbol{A}_E^\times)\sum_{\substack{\gamma\in E^\times/F^\times\\ \gamma\neq e}}\int_{\boldsymbol{A}_E^\times\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\varphi(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x,$$

其中因子$\frac{1}{2}$的出现是因为E上的F自同构个数为2. 因此要使G上的与G'上的两个迹公式相等，我们要选取φ或ϕ使得

$$\frac{1}{2}\sum_{L\in X'}\mathrm{vol}(\boldsymbol{A}_F^\times L^\times \backslash \boldsymbol{A}_L^\times)\sum_{\substack{\xi\in L^\times/F^\times\\ \xi\neq e}}\int_{\boldsymbol{A}_L^\times\backslash G'(\boldsymbol{A}_F)}\phi(x^{-1}\xi x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{E\in X}\mathrm{vol}(\boldsymbol{A}_F^\times E^\times \backslash \boldsymbol{A}_E^\times)\sum_{\substack{\gamma\in E^\times/F^\times\\ \gamma\neq e}}\int_{\boldsymbol{A}_E^\times\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\varphi(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

根据我们应用简化了的GL(2)迹公式时作的假设，存在不相同的v_1与v_2，使得对于$v=v_1$或v_2，

$$\int_{A(F_v)\backslash G(F_v)}\varphi_v\left(g^{-1}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)\mathrm{d}g = 0.$$

为了利用这个假设来简化(7)式等号的右边，我们把积分$\int_{\boldsymbol{A}_E^\times\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\varphi(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x$写成局部积分的乘积. 如果$E_v=E\otimes_F F_v$分裂，即同构于$F_v\oplus F_v$，则$E_v^\times$在$G(F_v)$中的像为$A(F_v)$. 因此其上局部积分等于$\int_{A(F_v)\backslash G(F_v)}\varphi_v(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x$，$\gamma=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$a\neq 1$. 如果此时$v=v_1$或$v_2$，则局部积分等于零. 据此我们设对于所有$v\in S$来说

$$\int_{A(F_v)\backslash G(F_v)}\varphi_v\left(x^{-1}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}x\right)\mathrm{d}x = 0,\quad a\neq 1,$$

则(7)式右边对$E\in X$求和的项当E在任一$v\in S$上分裂时即为零. 故此和实际上取遍所有在S上不分裂的二次扩域E，这些扩域E所组成的集合恰好就是(7)式左边的X'. 于是两迹公式相等就归结为选取φ或ϕ使得

$$\int_{\substack{A_E^\times\backslash G(A_F)\\ E\in X'}} \varphi(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x = \int_{A_E^\times\backslash G'(A_F)} \varphi'(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x$$

对所有 $\gamma\in E^\times$, $\gamma\notin F^\times$成立.

因为 $\varphi=\prod_v \varphi_v$ 与 $\varphi'=\prod_v \varphi'_v$，这个等式两端的积分都可以写成局部积分的乘积. 故我们需要得到

$$\int_{E_v\backslash G(F_v)} \varphi_v(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x = \int_{E_v\backslash G'(F_v)} \varphi'_v(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x.$$

对于 $v\notin S$，我们可把 $G'(F_v)$与 $G(F_v)$看成相等，故两端积分均取于 $A(F_v)\backslash G(F_v)$. 设 $\varphi_v=\varphi'_v$ 即可推出局部积分等式.

对于 $v\in S$ 上面的局部积分等式可以由下式推出

$$\mathrm{tr}\pi_v(\varphi_v) = \mathrm{tr}\pi'_v(\varphi'_v),$$

这里 π_v 为群 $G(F_v)$的一个不可约、可容许、模中心平方可积表示，而 π'_v 为 π_v 所对应的 $G'(F_v)$的一个不可约、可容许表示. 局部群表示的这种对应关系 $\pi_v\leftrightarrow\pi'_v$ 是局部域上群表示理论中的一个重要结果，详细讨论可见参考文献[46]，[35]及[43]等.

至此我们已经建立起了迹之间的等式. 即给定 φ 可找到满足某种条件的 φ'，给定 φ' 可找到满足某种条件的 φ，使得

$$\mathrm{tr}(P_{\mathrm{cusp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\mathrm{cusp}}) + \mathrm{tr}(P_{\mathrm{sp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\mathrm{sp}}) = \mathrm{tr}(\rho'_\omega(\varphi')).$$

将有离散谱分解的这些算子 $P_{\mathrm{cusp}}\rho_\omega P_{\mathrm{cusp}}$，$P_{\mathrm{sp}}\rho_\omega P_{\mathrm{sp}}$与 ρ'_ω 均分解为不可约表示的直和，则我们得到

$$\sum_\pi n(\pi)\mathrm{tr}\pi(\varphi) = \sum_{\pi'} n(\pi')\mathrm{tr}\pi'(\varphi'),$$

其中 π 取 $P_{\mathrm{cusp}}\rho_\omega P_{\mathrm{cusp}}$与 $P_{\mathrm{sp}}\rho_\omega P_{\mathrm{sp}}$的所有不同的不可约表示，而 π' 取 ρ'_ω 的所有不同的不可约表示. 这里 $n(\pi)$与 $n(\pi')$为不可约表示出现的重数.

由于上式中的函数对 $\varphi\leftrightarrow\varphi'$ 的选取有很大的任意性(但给定了一个 φ，φ' 没有许多选择余地)，$\mathrm{tr}\pi(\varphi)$与 $\mathrm{tr}\pi'(\varphi')$表现出某种特征的性质，有时叫它们为**余特征**. 将通常的特征线性独立的原理推广

后，可由上式证得整体表示 π 与 π' 之间存在着一种对应关系，这种关系就是 Langlands 所猜想的一般群表示函子性的一个特例. 同时由上面的迹公式等式亦可推出对于对应的 π 与 π'，其重数相等：$n(\pi)=n(\pi')$. Jacquet 及 Langlands[46]曾推得 $n(\pi)$ 至多为 1，则对四元数代数的群表示来说 $n(\pi')$ 亦至多为 1. 这种结论被称为**重数为一定理**.

概括来说，通过比较 GL(2)上的迹公式与四元数代数上的迹公式，我们介绍了可由群表示的局部函子性推出整体函子性（亦可直接推出整体函子性，见参考文献[37]），并由 GL(2)的重数为一定理推出四元数代数上的重数为一定理.

经过 50 年的发展，迹公式已被推广到一般线性代数群上，并通过这个一般迹公式计算出了一般线性代数群 G 的 Tamagawa 数，即 $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$ 或 $Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$ 的测度.

第四章　Kuznetsov 迹公式

前面两章所介绍的迹公式，都来源于对积分核按对角线方式积分以得到积分算子的迹，例如

$$\mathrm{tr}(P_{\mathrm{cusp}}\rho_\omega(\varphi)P_{\mathrm{cusp}}) = \int_{Z(\mathbb{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} K^{\varphi}_{\mathrm{cusp}}(x,x)\mathrm{d}x.$$

这种对角线方式的积分显然并没有把积分算子的核函数 $K(h,g)$ 所包含的信息全部利用. Kuznetsov 迹公式事实上就是通过对 $K(h,g)$ 进行另一种方式的积分以得到积分算子的不同的信息. 严格说来，不按对角线对核函数进行积分，所得的结果就不再是算子的迹，我们一般称这样的公式为相对迹公式. 相对迹公式的概念最早作为 Petterson 公式由 Petterson 在 20 世纪 30 年代提出，比 Selberg 迹公式出现的时间要早. 20 世纪 70 年代末通过 Kuznetsov 的工作，相对迹公式又重新引起人们的重视. Kuznetsov 在文献[7]中并没有对积分算子的核函数进行积分，而是通过对 Poincaré 级数的性质的研究计算出了 Poincaré 级数的内积. Kuznetsov 称其结果为和公式，见参考文献[49]. 其后 Zagier 指出了 Kuznetsov 迹公式可通过对核函数求双重 Fourier 级数展开而得到（见参考文献[50]）. 其后 Cogdell 及 Piatetski-Shapiro[51]又对这条新的证明思路进行了更详细的论证. 本章将给出 Kuznetsov 迹公式的一个新的形式（见参考文献[58]），并为下一章相对迹公式作部分准备工作.

§1　整体积分

设 F 为一代数数域，$\mathbb{A}_F = \prod_v' F_v$ 为 F 的阿代尔环，$\mathbb{A}_F^\times =$

$\prod_v{}' F_v^\times$ 为伊代尔群. 对于非 Archimedes v，记 R_v 为 F_v 的整数环，P_v 为 R_v 中的最大素理想，ϖ_v 为 P_v 的一个生成元，$P_v=\varpi_v R_v$. 又记 $R_v^\times=R_v-P_v$ 为 R_v 中可逆元素的集合. 取 $\eta=\prod_v \eta_v$ 为 $\mathbf{A}_F^\times$ 上的一个实特征，其在 $F^\times$ 上恒等于 1. 设 $f=\prod_v f_v$ 为任意一个在 $\mathrm{GL}(2,\mathbf{A}_F)=G(\mathbf{A}_F)$上的无穷次可微紧支集函数，其满足限制乘积的条件：对几乎所有的 v 来说 f_v 为 $K(F_v)$的特征函数. 我们定义核函数

$$K^f(h,g)=\int_{Z(F)\backslash Z(\mathbf{A}_F)}\sum_{\gamma\in G(F)}f(h^{-1}\gamma zg)\eta(z)\mathrm{d}^\times z.$$

这里群 $G(\mathbf{A}_F)$的中心 $Z(\mathbf{A}_F)$同构于伊代尔群 $\mathbf{A}_F^\times$，而 $\mathrm{d}^\times z$ 为 $Z(\mathbf{A}_F)$上，也就是 $\mathbf{A}_F^\times$ 上的一个积性测度. 对于任意给定的 h 与 g，上式定义的积分绝对收敛，其中的和只有有限个非零项. 取 $\psi=\prod_v \psi_v$ 为 $\mathbf{A}_F$ 上的一个非平凡特征，其在 F 上恒等于 1. 对于任意非 Archimedes 局部域 F_v，称使 ψ_v 在 $\varpi_v^n R_v$ 上平凡的最小整数为 ψ_v 的阶. 则对于几乎所有的 v 来说，ψ_v 的阶为零.

Kuznetsov 迹公式是由下面的积分给出的：

$$\int_{F\backslash\mathbf{A}_F}\int_{F\backslash\mathbf{A}_F}K^f\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}\right)\bar{\psi}(ax)\psi(by)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $a,b\in F^\times$. 换句话说，我们要对 $K^f(h,g)$求其双重 Fourier 系数. 由于 $F\backslash\mathbf{A}_F$ 紧致，这个积分绝对收敛. 根据 $\mathrm{GL}(2)$上的 Bruhat 分解，

$$G(F)=P(F)\cup P(F)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}N(F),$$

其中 $P(F)=\left\{\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix}\right\}$，而 $N(F)=\left\{\begin{pmatrix}1&*\\0&1\end{pmatrix}\right\}$，上式等于

$$\int_{F\backslash\mathbf{A}_F}\int_{F\backslash\mathbf{A}_F}\int_{Z(F)\backslash Z(\mathbf{A}_F)}\sum_{\gamma\in G(F)}f\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\gamma z\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times \overline{\psi}(ax)\psi(by)\eta(z)\mathrm{d}^{\times}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{A\in F^{\times}} \int_{A_F}\int_{A_F}\int_{Z(A_F)} f\left(z\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times \psi(ax)\psi(by)\eta(z)\mathrm{d}^{\times}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \sum_{A\in F^{\times}} \int_{F\backslash A_F}\mathrm{d}y\int_{A_F}\int_{Z(A_F)} f\left(z\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times \psi(ax)\psi(by)\eta(z)\mathrm{d}^{\times}z\mathrm{d}x.$$

上式右边第二个式子等于

$$\sum_{A\in F^{\times}} \int_{F\backslash A_F}\mathrm{d}y\int_{A_F}\int_{Z(A_F)} f\left(z\begin{pmatrix}A & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times \psi(ax + (b - aA)y)\eta(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}^{\times}z$$

$$= \mathrm{vol}(F\backslash \boldsymbol{A}_F)\int_{A_F}\int_{Z(A_F)} f\left(z\begin{pmatrix}b/a & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\eta(z)\psi(ax)\mathrm{d}^{\times}z\mathrm{d}x.$$

因此

$$\int_{F\backslash A_F}\int_{F\backslash A_F} K^f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\overline{\psi}(ax)\psi(by)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{A\in F^{\times}} \int_{A_F}\int_{A_F}\int_{Z(A_F)} f\left(z\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times \eta(z)\psi(ax + by)\mathrm{d}^{\times}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \mathrm{vol}(F\backslash \boldsymbol{A}_F)\int_{A_F}\int_{Z(A_F)} f\left(z\begin{pmatrix}b/a & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\eta(z)\psi(ax)\mathrm{d}^{\times}z\mathrm{d}x.$$

由于函数 f 有紧支集，以上这些积分均绝对收敛.

以下我们取 $F=\boldsymbol{Q}$，$a=-m$ 为一个非零整数，及 $b=1$. 对于特征 ψ，我们设 $\psi_{\boldsymbol{R}}(x)=\mathrm{e}^{2\pi i x}$，并且每一个 $\psi_p(p<\infty)$ 的阶均为零. 又取局部测度：$\mathrm{d}x_{\boldsymbol{R}}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上通常 Lebesgue 测度，$\mathrm{d}x_v(v<\infty)$ 满足 $\mathrm{vol}(R_v)=1$. 取整体测度 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_{\boldsymbol{R}}\prod_v \mathrm{d}x_v$，则 $\mathrm{vol}(\boldsymbol{Q}\backslash\boldsymbol{A})=1$，并且

$$\int_{Q\backslash A}\int_{Q\backslash A} K^f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(mx + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{A\in Q^{\times}} I_f(A)$$

$$+\int_{A}\int_{Z(A)} f\left(z\begin{pmatrix}-1/m & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\eta(z)\psi(x)\mathrm{d}^{\times}z\mathrm{d}x, \quad (1)$$

其中 $Q^{\times}$ 为非零有理数的集合，

$$I_f(A)=\prod_{p\leqslant\infty} I_{f_p}(A),$$

而对于 $p\leqslant\infty$，

$$I_{f_p}(A)=\int_{Q_p}\int_{Q_p}\int_{Z(Q_p)} f_p\left(z\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$
$$\times\ \eta_p(z)\psi_p(y-mx)\mathrm{d}^{\times}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

§2 函 数 选 取

固定一个正整数 n. 如果 $n>1$，设 $n=p_1^{b_1}\cdots p_r^{b_r}$，其中 $p_1,\cdots,p_r$ 为不同的素数，$b_1,\cdots,b_r>0$. 我们要根据这给定的 m 与 n 选取局部函数 f_R与 $f_p(p<\infty)$. 首先如果 $p\neq p_1,\cdots,p_r$，我们取 f_p 如下：其支集包含于 $K(Q_p)$之中，对于主同余子群 $K_3=\{k\in K(Q_p)\mid k\equiv I(\mathrm{mod}\ \varpi_p^3R_p)\}$左不变，且对于 $N(R_p)=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle| x\in R_p\right\}$左右不变. 因此根据 Bruhat 分解 f_p 可由其在$\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix}0 & a_2\\ a_1 & 0\end{pmatrix}$ $(a_1,a_2\in R_p^{\times}/(1+\varpi_p^3R_p))$上的值所惟一确定. 我们进一步设

$$f_p\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}=f_p\begin{pmatrix}0 & a_2\\ a_1 & 0\end{pmatrix}=\eta_p(a_1).$$

我们要指出，上面这最后一个条件是可行的. 事实上，如果 $A^{\times}/Q^{\times}$上的实特征 η 非平凡，根据类域论，存在一个二次代数数域 $E=Q(\sqrt{\tau})$，使得 η 在 $N_{E/Q}(A_E^{\times})Q^{\times}$上恒等于 1. 可设 τ 为一非零无平方因子整数，$\tau\neq 1$，则 $\eta=\eta_R\prod_{p<\infty}\eta_p$ 可由下式给出：对于 $x\in R^{\times}$，

$$\eta_R(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(x), & \text{如果 } \tau<0;\\ 1, & \text{如果 } \tau>0.\end{cases}$$

对于 $p<\infty, n\in\mathbf{Z}, x>0, (x,p)=1$,

$$\eta_p(p^n x)=\begin{cases}1, & \text{如果 } p>2, p\nmid\tau, \left(\frac{\tau}{p}\right)=1,\\ & \quad\text{或 } p=2, \tau\equiv 1(\bmod 8);\\ (-1)^n, & \text{如果 } p>2, p\nmid\tau, \left(\frac{\tau}{p}\right)=-1,\\ & \quad\text{或 } p=2, \tau\equiv 5(\bmod 8);\\ \left(\frac{-1}{x}\right), & \text{如果 } p=2, \tau\equiv 7(\bmod 8);\\ (-1)^n\left(\frac{-1}{x}\right), & \text{如果 } p=2, \tau\equiv 3(\bmod 8);\\ \left(\frac{2}{x}\right), & \text{如果 } p=2, \tau\equiv 2(\bmod 16);\\ (-1)^n\left(\frac{2}{x}\right), & \text{如果 } p=2, \tau\equiv 10(\bmod 16);\\ \left(\frac{-2}{x}\right), & \text{如果 } p=2, \tau\equiv 14(\bmod 16);\\ (-1)^n\left(\frac{-2}{x}\right), & \text{如果 } p=2, \tau\equiv 6(\bmod 16);\\ \left(\frac{-\tau_1}{p}\right)^n\left(\frac{x}{p}\right), & \text{如果 } p>2, p\mid\tau, \tau=p\tau_1.\end{cases}$$

由此可见对于 $p<\infty$,η_p 在 $1+\varpi_p^3 R_p$ 上恒为 1. 另外,对于几乎所有的 p,η_p 在 $\boldsymbol{R}_p^\times$ 上恒等于 1,故对几乎所有的 p,f_p 为 $K(\boldsymbol{Q}_p)$的特征函数.

我们转而设 $p=p_i$. 取 f_p 如下:其支集包含于 $K(\boldsymbol{Q}_p)\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_p^{b_i}\end{bmatrix}N(R_p)$之中,对于 K_3 左不变,且对于 $N(R_p)$左右不

变. 故 f_p 由其在 $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2\varpi_p^{b_t} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & a_2\varpi_p^{b_t} \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$ $(a_1, a_2 \in R_p^\times/(1+\varpi_p^3 R_p))$ 上的值所惟一确定. 我们进而设

$$f_p\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2\varpi_p^{b_t} \end{pmatrix} = f_p\begin{pmatrix} 0 & a_2\varpi_p^{b_t} \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} = \eta_p(a_1).$$

对函数 $f_{\boldsymbol{R}}$的选取通过 Bruhat 分解 $G(\boldsymbol{R}) = P(\boldsymbol{R}) \cup P(\boldsymbol{R}) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} N(\boldsymbol{R})$来进行. 首先设 $f_{\boldsymbol{R}}$在 $P(\boldsymbol{R})$上恒为零. 在 $P(\boldsymbol{R}) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} N(\boldsymbol{R})$上, 设

$$f_{\boldsymbol{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & az \\ z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f_1(x)f_2(y)f_3(z)f_4(a),$$

$$x, y \in \boldsymbol{R}, \quad a, z \in \boldsymbol{R}^\times,$$

其中 f_1 与 f_2 为 $\boldsymbol{R}$ 上的无穷次可微有紧支集的函数, 而 f_3 与 f_4 为 $\boldsymbol{R}^\times$ 上无穷次可微有紧支集的函数. 由于 $f_{\boldsymbol{R}}$的支集与 $P(\boldsymbol{R})$的某一邻域不相交, 如此定义的函数 $f_{\boldsymbol{R}}$为 $G(\boldsymbol{R})$上的无穷次可微有紧支集的函数. 我们进而设

$$\int_{\boldsymbol{R}} f_1(x)\mathrm{e}^{-2\pi i m x}\mathrm{d}x = 1, \quad \int_{\boldsymbol{R}} f_2(y)\mathrm{e}^{2\pi i y}\mathrm{d}y = 1,$$

及

$$\int_{\boldsymbol{R}^\times} f_3(z)\,\frac{\mathrm{d}z}{|z|_{\boldsymbol{R}}} = 1.$$

利用如此选择的局部函数 $f_{\boldsymbol{R}}, f_p (p<\infty)$ 及其乘积 $f = f_{\boldsymbol{R}}\prod_{p<\infty} f_p$, 我们可对(1)式进行进一步的计算. 首先 $f_{\boldsymbol{R}}$在 $P(\boldsymbol{R})$上为零推出

$$\int_{A}\int_{Z(A)} f\left(z\begin{pmatrix} -1/m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\eta(z)\psi(x)\mathrm{d}^\times z\mathrm{d}x = 0.$$

§3 局部积分

以下我们对 $I_{f_\infty}(A)$与 $I_{f_p}(A)$ $(p<\infty)$逐一进行计算. 由于 f_p 对于 K_3 左不变,其可以写为卷积形式

$$
\begin{aligned}
f_p(g) &= \mathrm{vol}(K_3)^{-1} f_0 * f_p(g) \\
&= \mathrm{vol}(K_3)^{-1}\int_{G(\mathbf{Q}_p)} f_0(gh^{-1}) f_p(h)\mathrm{d}h,
\end{aligned}
$$

这里 f_0 为 K_3 的特征函数. 因此

$$
\begin{aligned}
I_{f_p}(A) = &\mathrm{vol}(K_3)^{-1}\int_{\mathbf{Q}_p}\int_{\mathbf{Q}_p}\int_{Z(\mathbf{Q}_p)}\int_{G(\mathbf{Q}_p)} \\
& f_0\left(z\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}h^{-1}\right) \\
& \times f_p(h)\eta_p(z)\psi_p(y-mx)\mathrm{d}h\mathrm{d}^\times z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

用 Bruhat 分解可设 $h=k\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $k\in K(\mathbf{Q}_p)$, $a_1,a_2\in \mathbf{Q}_p^\times/R_p^\times$, $n\in\mathbf{Q}_p$,则

$$
\begin{aligned}
I_{f_p}(A) = &\sum_{k\in K_3\backslash K(\mathbf{Q}_p)}\ \sum_{a_1,a_2\in \mathbf{Q}_p^\times/R_p^\times}\int_{\mathbf{Q}_p}\int_{\mathbf{Q}_p}\int_{Z(\mathbf{Q}_p)}\int_{\mathbf{Q}_p} \\
& f_0\left(z\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right. \\
& \times\left.\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/a_1 & 0\\ 0 & 1/a_2\end{pmatrix}k^{-1}\right) \\
& \times f_p\left(k\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\eta_p(z)\psi_p(y-mx) \\
& \times\left|\frac{a_1}{a_2}\right|_p \mathrm{d}n\mathrm{d}^\times z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

作变量替换 $u=y-n$,并设 $a_1=\varpi_p^{\lambda_1}$, $a_2=\varpi_p^{\lambda_1+\lambda_2}$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{Z}$,我们得到

$$I_{f_p}(A)=\sum_{k\in K_3\backslash K(Q_p)}\sum_{\lambda_1,\lambda_2\in Z}\Psi_{f_p}\left(k\begin{pmatrix}\varpi_p^{\lambda_1} & 0\\ 0 & \varpi_p^{\lambda_1+\lambda_2}\end{pmatrix}\right)p^{\lambda_2}$$

$$\times\int_{Q_p}\int_{Q_p}\int_{Z(Q_p)}f_0\left(z\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}\varpi_p^{-\lambda_1} & 0\\ 0 & \varpi_p^{-\lambda_1-\lambda_2}\end{pmatrix}k^{-1}\right)$$

$$\times\eta_p(z)\psi_p(u-mx)\mathrm{d}^\times z\mathrm{d}x\mathrm{d}u,$$

其中

$$\Psi_{f_p}(g)=\int_{Q_p}f_p\left(g\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_p(n)\mathrm{d}n.$$

再作变量替换 $y=u\,\varpi_p^{-\lambda_1}$,则

$$I_{f_p}(A)=\sum_{\substack{k\in K_3\backslash K(Q_p)\\ \lambda_1,\lambda_2\in Z}}\Psi_{f_p}\left(k\begin{pmatrix}\varpi_p^{\lambda_1} & 0\\ 0 & \varpi_p^{\lambda_1+\lambda_2}\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\int\eta_p(z)\psi_p(y\,\varpi_p^{\lambda_1}-mx)\mathrm{d}^\times z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

上式中的积分对 $x,y\in Q_p,z\in Q_p^\times$ 取,并满足

$$z\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varpi_p^{-\lambda_1} & 0\\ 0 & \varpi_p^{-\lambda_1-\lambda_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in K_3k.$$

根据我们对 f_p 的选取,当 $p\neq p_1,\cdots,p_r$ 时,f_p 的支集包含在 $K(Q_p)$中,而当 $p=p_i$ 时,f_p 的支集包含在 $K(Q_p)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_p^{b_i}\end{pmatrix}N(R_p)$ 之中.以下我们可设 $p=p_i$ 及 $b_i\geqslant 0$ 而对上而这两种情况一并进行计算.因此

$$\Psi_{f_p}\left(k\begin{pmatrix}\varpi_p^{\lambda_1} & 0\\ 0 & \varpi_p^{\lambda_1+\lambda_2}\end{pmatrix}\right)\neq 0\text{ 仅当 }\lambda_1=0,\lambda_2=b_i,p=p_i.$$

此时

$$\Psi_{f_p}\left(k\begin{pmatrix}\varpi_p^{\lambda_1} & 0\\ 0 & \varpi_p^{\lambda_1+\lambda_2}\end{pmatrix}\right)=f_p\left(k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_p^{b_i}\end{pmatrix}\right),$$

并且

$$I_{f_p}(A)=\sum_{k\in K_3\backslash K(Q_p)} f_p\left(k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_p^{b_i}\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\int\limits_{\substack{x,y\in Q_p\\ z\in Q_p^\times\\ z\begin{pmatrix}x & A\varpi_p^{-b_i}+xy\\ 1 & y\end{pmatrix}\in K_3k}} \eta_p(z)\psi_p(y\,\varpi_p^{b_i}-mx)\mathrm{d}^\times z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 f_p 在 $N(\boldsymbol{R}_p)$下左右不变，上式中的 k 可取成 $k\in K_3N(R_p)\backslash K(\boldsymbol{Q}_p)/N(R_p)$，这里我们用到了 $b_i\geqslant 0$. 因此上式中积分号下的最后一条件可改写为

$$z\begin{pmatrix}x & A\varpi_p^{-b_i}+xy\\ 1 & y\end{pmatrix}\in K_3N(R_p)kN(R_p),$$

并且 $z\in R_p, z^2A\varpi_p^{-b_i}\in R_p^\times, \mathrm{ord}_p(A)\leqslant b_i, \mathrm{ord}_p(A)\equiv b_i(\mathrm{mod}\ 2)$, $z\in\varpi_p^{(b_i-\mathrm{ord}_p(A))/2}R_p^\times$.

如果 $\mathrm{ord}_p(A)=b_i$，则 $z\in R_p^\times$, $x,y\in R_p$. 对 x,y 积分后得

$$I_{f_p}(A)=\sum_{k\in K_3N(R_p)\backslash K(Q_p)/N(R_p)} f_p\left(k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_p^{b_i}\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\int\limits_{\substack{z\in R_p^\times\\ z\begin{pmatrix}0 & A\varpi_p^{-b_i}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in K_3N(R_p)kN(R_p)}} \eta_p(z)\mathrm{d}^\times z.$$

于是我们可取 $k=\begin{pmatrix}0 & a_2\\ a_1 & 0\end{pmatrix}$, $a_1,a_2\in R_p^\times/(1+\varpi_p^3R_p)$，从而

$$I_{f_p}(A)=\sum_{a_1,a_2\in R_p^\times/(1+\varpi_p^3R_p)} f_p\begin{pmatrix}0 & a_2\varpi_p^{b_i}\\ a_1 & 0\end{pmatrix}\int\limits_{\substack{z\in a_1(1+\varpi_p^3R_p)\\ zA\varpi_p^{-b_i}\in a_2(1+\varpi_p^3R_p)}} \eta_p(z)\mathrm{d}^\times z.$$

因为此时 $f_p\begin{pmatrix}0 & a_2\varpi_p^{b_i}\\ a_1 & 0\end{pmatrix}=\eta_p(a_1)$，而 $\eta_p(z)=\eta_p(a_1)$，我们可对 z

求积分然后再对 a_1 求和. 计算结果为

$$I_{f_p}(A)=1,\quad 如果\ \mathrm{ord}_p(A)=b_i.$$

如果 $\mathrm{ord}_p(A)<b_i$ 且 $\mathrm{ord}_p(A)=b_i \pmod 2$，我们得到 $z\in \varpi_p^{(b_i-\mathrm{ord}_p(A))/2}R_p^\times$，$x\in\varpi_p^{(\mathrm{ord}_p(A)-b_i)/2}R_p^\times$，$y=-A\varpi_p^{-b_i}/x+y_1$，及 $y_1\in R_p$. 对 y_1 积分，则

$$I_{f_p}(A)=\sum_{k\in K_3N(R_p)\backslash K(Q_p)/N(R_p)} f_p\left(k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_p^{b_i}\end{pmatrix}\right)$$
$$\times\int_{\substack{x\in\varpi_p^{(\mathrm{ord}_p(A)-b_i)/2}R_p^\times\\ z\in\varpi_p^{(b_i-\mathrm{ord}_p(A))/2}R_p^\times\\ z\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & -A\varpi_p^{b_i}/x\end{pmatrix}\in K_3N(R_p)kN(R_p)}}\eta_p(z)\,\overline{\psi}_p\left(\frac{A}{x}+mx\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times z.$$

根据上式积分最后一个条件我们可取 $k=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}$，故

$$I_{f_p}(A)=\sum_{a_1,a_2\in R_p^\times/(1+\varpi_p^3R_p)} f_p\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\varpi_p^{b_i}\end{pmatrix}$$
$$\times\int_{\substack{x\in\varpi_p^{(\mathrm{ord}_p(A)-b_i)/2}R_p^\times\\ z\in\varpi_p^{(b_i-\mathrm{ord}_p(A))/2}R_p^\times\\ xz\in a_1(1+\varpi_p^3R_p)\\ -zA\varpi_p^{-b_i}/x\in a_2(1+\varpi_p^3R_p)}}\eta_p(z)\,\overline{\psi}_p\left(\frac{A}{x}+mx\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times z.$$

我们注意到 $f_p\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\varpi_p^{b_i}\end{pmatrix}=\eta_p(a_1)$，$\eta_p(z)=\eta_p(x)\eta_p(a_1)$. 对 $z\in \frac{a_1}{x}(1+\varpi_p^3R_p)$积分并对 a_2 求和后，有

$$I_{f_p}(A)=\int_{\varpi_p^{(\mathrm{ord}_p(A)-b_i)/2}R_p^\times}\eta_p(x)\,\overline{\psi}_p\left(\frac{A}{x}+mx\right)\mathrm{d}x,$$

其中 $\mathrm{ord}_p(A)<b_i$，$\mathrm{ord}_p(A)\equiv b_i \pmod 2$.

我们注意到 $I_{f_p}(A)$非零仅当 $\mathrm{ord}_p(A)\leqslant b_i$，$\mathrm{ord}_p(A)\equiv b_i$(mod

2). 故在计算和式 $\sum\limits_{A\in Q^\times} I_f(A)$ 时可设 $A=\pm n/c^2$, 其中 c 取遍所有正整数. 对 x 作变量替换后我们得到

$$I_{f_p}\left(\pm\frac{n}{c^2}\right)=\begin{cases}(1-p^{-1})p^{\mathrm{ord}_p(c)}\eta_p(c)\int_{R_p^\times}\eta_p(x) & \text{如果 } \mathrm{ord}_p(c)>0 \\ \quad\times\overline{\psi}_p\left(\dfrac{mx\pm n/x}{c}\right)\mathrm{d}^\times x, & \text{即 } p\mid c; \\ 1, & \text{如果 } \mathrm{ord}_p(c)=0 \\ & \text{即 } p\nmid c.\end{cases}$$

这里积性测度 $\mathrm{d}^\times x=|x|_p^{-1}\dfrac{\mathrm{d}x}{1-p^{-1}}$.

最后我们计算 $I_{f_R}(A)$:

$$\begin{aligned}I_{f_R}(A)=&\int_R f_1(x)\mathrm{e}^{-2\pi i mx}\mathrm{d}x\int_R f_2(y)\mathrm{e}^{2\pi i y}\mathrm{d}y\\&\times\int_R f_3(z)\frac{\mathrm{d}z}{|z|_R}f_4(A)\\=&f_4(A).\end{aligned}$$

利用以上这些计算结果, §1 核函数的整体积分等于

$$\begin{aligned}\sum_{A\in Q^\times} I_f(A)=&\sum_{c\geqslant 1}f_4\left(\frac{n}{c^2}\right)\prod_{p\mid c}(1-p^{-1})p^{\mathrm{ord}_p(c)}\eta_p(c)\\&\times\int_{R_p^\times}\eta_p(x)\,\overline{\psi}_p\left(\frac{mx+n/x}{c}\right)\mathrm{d}^\times x\\&+\sum_{c\geqslant 1}f_4\left(-\frac{n}{c^2}\right)\prod_{p\mid c}(1-p^{-1})p^{\mathrm{ord}_p(c)}\eta_p(c)\\&\times\int_{R_p^\times}\eta_p(x)\,\overline{\psi}_p\left(\frac{mx-n/x}{c}\right)\mathrm{d}^\times x.\end{aligned}$$

§ 4 Kloosterman 和与迹公式

经典 Kloosterman 和的定义是

$$K(m,n;c)=\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant c\\(a,c)=1}}\mathrm{e}^{2\pi i(am+\bar{a}n)/c},$$

其中 m 与 n 为非零整数，c 为正整数，而 $a\bar{a}\equiv 1 \pmod{c}$. 利用广义 Kronecker 符号 $\left(\frac{c}{a}\right)$（见参考文献[53]，[54]与[55]），我们又可定义带积性特征的 Kloosterman 和

$$K_k(m,n;c) = \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant c\\(a,c)=1}} \varepsilon_a^{-\kappa}\left(\frac{c}{a}\right)e^{2\pi i(am+\bar{a}n)/c},$$

其中 κ 是一个奇数，$k=\kappa/2$，且 $\varepsilon_a=1$，如果 $a\equiv 1 \pmod 4$；$\varepsilon_a=i$，如果 $a\equiv 3 \pmod 4$. 我们知道这个 $K_k(m,n;c)$ 可化为 Salié 和：

$$S(m,n;q) = \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant c\\(a,q)=1}} \left(\frac{a}{q}\right)e^{2\pi i(am+\bar{a}n)/q},$$

其中 q 为奇数.

以上这些指数和建议我们研究下面的广义 Kloosterman 和

$$K(m,n;c;\eta) = \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant c\\(a,c)=1}} \left(\prod_{p|c}\eta_p(a)\right)e^{2\pi i(am+\bar{a}n)/c},$$

其中 $\eta=\eta_R\prod_p\eta_p$ 为 $\boldsymbol{A}^\times/\boldsymbol{Q}^\times$ 上的一个实特征. 如果 η 不是平凡特征，根据 §2 我们对 η_p 的计算，

$$\prod_{p|c}\eta_p(a) = \begin{cases}\left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{a}{(c,\tau)}\right), & \text{如果 } 2|c, \tau\equiv 3 \pmod 4,\\ \left(\frac{a}{(c,\tau)}\right), & \text{其他情况},\end{cases}$$

这里 $\left(\frac{a}{(c,\tau)}\right)$ 是 Kronecker 符号. 当 c 为奇数时，对于适当的 τ 来说，$K(m,n;c;\eta)$ 就是 Salié 和 $S(m,n;c)$.

利用 $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{Q}$ 上的特征 $\psi=\psi_R\prod_p\psi_p$，我们可改写

$$\begin{aligned}K(m,n;c;\eta) &= \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant c\\(a,c)=1}} \prod_{p|c}\eta_p(a)\,\bar{\psi}_p\left(\frac{am+\bar{a}n}{c}\right)\\ &= \prod_{p|c}\sum_{x\in R_p^\times/(1+\varpi_p^{\operatorname{ord}_p(c)}R_p)}\eta_p(x)\,\bar{\psi}_p\left(\frac{mx+n/x}{c}\right).\end{aligned}$$

将右边的和式写成积分形式，我们就得到

$$K(m,n;c;\eta) = \phi(c)\prod_{p|c}\int_{R_p^\times}\eta_p(x)\,\overline{\psi}_p\left(\frac{mx+n/x}{c}\right)\mathrm{d}^\times x,$$

其中 $\phi(c)$是 Euler 函数. 因此，上节我们的计算结果可表示为

$$\int_{Q\backslash A}\int_{Q\backslash A}K^f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(mx+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{c\geqslant 1}f_4\left(\frac{n}{c^2}\right)K(m,n;c;\eta)\prod_{p|c}\eta_p(c)$$

$$+ \sum_{c\geqslant 1}f_4\left(-\frac{n}{c^2}\right)K(m,-n;c;\eta)\prod_{p|c}\eta_p(c).$$

回忆第三章中我们得到的核函数的谱分解表示式：

$$K^f(h,g) = K^f_{\mathrm{cusp}}(h,g) + K^f_{\mathrm{cont}}(h,g) + K^f_{\mathrm{sp}}(h,g).$$

由于 $\boldsymbol{Q}\backslash\boldsymbol{A}$ 紧致，我们可对上式逐项积分. 其中最简单的一项是

$$\int_{Q\backslash A}\int_{Q\backslash A}K^f_{\mathrm{sp}}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(mx+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= (\mathrm{vol}(Z(\boldsymbol{A})G(\boldsymbol{Q})\backslash G(\boldsymbol{A}))^{-1}\sum_{\chi^2=\eta}\int_{Q\backslash A}\int_{Q\backslash A}\psi(mx+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\times\int_{Z(A)\backslash G(A)}f(g)\,\overline{\chi}(\det g)\mathrm{d}g$$

$$= 0.$$

因此我们就得到如下结果：

定理（广义 Kloosterman 和的 Kuznetsov 迹公式） 设 f_4 为 $\boldsymbol{R}^\times$ 上无穷次可微有紧支集的函数. 对任意正整数 n 及非零整数 m，定义 $f_1,f_2,f_3,f_{\boldsymbol{R}},f_p(p<\infty)$及 f 如前. 设 $\eta=\eta_{\boldsymbol{R}}\prod_p\eta_p$ 为 $\boldsymbol{A}^\times/\boldsymbol{Q}^\times$上的一个实特征，而 $\psi=\psi_{\boldsymbol{R}}\prod_p\psi_p$ 为 $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{Q}$ 上一非平凡特征，满足 $\psi_{\boldsymbol{R}}(x)=\mathrm{e}^{2\pi i x}$及对任意 p，ψ_p 的阶为零，则

$$\sum_{c\geqslant 1}f_4\left(\frac{n}{c^2}\right)K(m,n;c;\eta)\prod_{p|c}\eta_p(c)$$

$$+ \sum_{c\geqslant 1}f_4\left(-\frac{n}{c^2}\right)K(m,-n;c;\eta)\prod_{p|c}\eta_p(c)$$

$$= \int_{Q\backslash A}\int_{Q\backslash A} K^f_{\text{cusp}}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(mx+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \int_{Q\backslash A}\int_{Q\backslash A} K^f_{\text{cont}}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(mx+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

我们指出,如果 η 为平凡特征,则以上的等式即为通常的 Kuznetsov 迹公式(见参考文献[50],[51]):

$$\sum_{c\geqslant 1} f_4\left(\frac{n}{c^2}\right)K(m,n;c) + \sum_{c\geqslant 1} f_4\left(-\frac{n}{c^2}\right)K(m,-n;c)$$

$$= \int_{Q\backslash A}\int_{Q\backslash A} K^f_{\text{cusp}}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(mx+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \int_{Q\backslash A}\int_{Q\backslash A} K^f_{\text{cont}}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(mx+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

通常 f_4 被称为测试函数.例如我们可设无穷次可微函数 f_4 在负实数上永远为零,并对于给定的实数 $X>1$ 取

$f_4(x)=\sqrt{x}$, 如果 $\frac{n}{X^2}\leqslant x\leqslant n$,

$0\leqslant f_4(x)\leqslant\sqrt{x}$, 如果 $n<x<n+1$,或 $\frac{n}{(X+1)^2}<x<\frac{n}{X^2}$,

$f_4(x)=0$, 其他,

则对此函数,Kuznetsov 迹公式左边变成

$$\sqrt{n}\sum_{1\leqslant c\leqslant X}\frac{K(m,n;c)}{c}.$$

用§2 方法选取 f_1, f_2, f_3, f_R, f_p 及 f,则有

$$\sum_{1\leqslant c\leqslant X}\frac{K(m,n;c)}{c} = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{Q\backslash A}\int_{Q\backslash A} K^f_{\text{cusp}}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ \psi(mx+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{Q\backslash A}\int_{Q\backslash A} K^f_{\text{cont}}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(mx+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

此式左边即为 Kloosterman 和之加权平均，对此有以下猜想（见参考文献[36]，[57]）：

$$\sum_{1 \leqslant c \leqslant x} \frac{K(m,n;c)}{c} = O(x^{\varepsilon})$$

对任意 $\varepsilon>0$ 成立. 目前最好的结果是 Kuznetsov 用其迹公式得到的 $O(x^{1/6}(\log x)^{1/3})$（见参考文献[7]）. Goldfeld 与 Sarnak[84]利用 Kloosterman zeta 函数亦证明了这个 $\frac{1}{6}$ 结果，但他们结果中的对数幂次较高.

§5　谱分解部分

Kuznetsov 的估计是对其迹公式的谱分解部分进行的估计. 他的迹公式的谱分解部分的具体估计见下一节. 在本节中我们要计算上面证明了的 Kuznetsov 迹公式的新的谱分解展开式，以为下一章作准备.

按照第三章的计算结果，我们可取一有限集合 S，包含 $\boldsymbol{Q}$ 的实赋值 $\boldsymbol{R}$ 及素数赋值 $p_1,\cdots,p_r$. 如果特征 η 为非平凡特征，则我们更要求集合 S 包含所有 p，其在二次扩域 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{\tau})$ 中分歧. 换句话说，对非平凡的 $\eta=\eta_{\boldsymbol{R}}\prod_p \eta_p$，$S$ 包含所有使 η_p 在 $R_p^{\times}$ 上非平凡的 p. 积分算子 $\rho_\eta(f)$ 在尖点形式空间 $L_0^2(G(\boldsymbol{Q})\backslash G(\boldsymbol{A}),\eta)$ 上可分解为不可约子表示 σ 的直和. 对于每一个不可约子表示 σ 其在 $G(\boldsymbol{A})$ 的子群 $K^S=\prod_{p\notin S} K(\boldsymbol{Q}_p)$ 上可能不再是不可约. 将 σ 分解为 K^S 的不可约子表示的直和. 我们需要考虑那样的 σ，其在 K^S 的不可约子表示中有一个 K^S 的单位表示，即对于这样的 σ 其表示空间中存在一个在 K^S 通过 σ 作用的一个不可约子空间 $U_S(\sigma)$，使得对任意 $k\in K^S$，$\sigma(k)$ 均为 $U_S(\sigma)$ 上的一个单位（即恒等）线性变换. 对如此的 σ，这样的不可约子空间不一定惟一，记 $V_S(\sigma)$ 为 σ 的表示空间中

所有在 K^S 作用下不变的向量组成的子空间. 设 σ_S 为 $G(\boldsymbol{Q}_S)=\prod_{p\in S, p\leqslant\infty} G(\boldsymbol{Q}_p)$ 在 $V_S(\sigma)$ 上的表示，又设 $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 为 $V_S(\sigma)$ 的一组标准正交基，则

$$K_{\text{cusp}}^f(h,g) = \sum_\sigma \sum_{\alpha\in J} \sigma_S(\widetilde{f}_S)\Phi_\alpha(h)\overline{\Phi}_\alpha(g),$$

其中 $\widetilde{f}_S=\prod_{\substack{p\in S\\ p\leqslant\infty}} \widetilde{f}_p$，$\widetilde{f}_p(g)=\int_{Z(\boldsymbol{Q}_p)} f_p(zg)\eta_p(z)\mathrm{d}^\times z$. 这里用到了这样一个事实，即对于 $p\notin S$，η_p 在 $R_p^\times$ 上平凡且 f_p 为 $K(\boldsymbol{Q}_p)$ 的特征函数，故 $\hat{\sigma}(\widetilde{f}^S)=1$. 根据这个式子，

$$\int_{Q\backslash A}\int_{Q\backslash A} K_{\text{cusp}}^f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(mx+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sum_\sigma \sum_{\alpha\in J}\int_{Q\backslash A}(\sigma_S(\widetilde{f}_S)\Phi_\alpha)\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\psi(mx)\mathrm{d}x$$

$$\times\int_{Q\backslash A}\overline{\Phi}_\alpha\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\psi(y)\mathrm{d}y.$$

根据第三章 § 6 的讨论，我们知道

$$K_{\text{cont}}^f(h,g)=\frac{1}{16\pi^3}\sum_{l,n\in Z}\sum_{\mu\nu=\eta}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{\alpha,\beta\in I}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}$$

$$(\pi(\mathrm{i}t,\mu,\nu)(\widetilde{f}_{\varphi_1,\varphi_2})\phi_\beta,\phi_\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\varphi_2}\mathrm{d}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_2$$

$$\times E(h,\phi_\alpha,\mathrm{i}t,\mu,\nu)\overline{E}(g,\phi_\beta,\mathrm{i}t,\mu,\nu)\mathrm{d}t,$$

其中我们回忆

$$f_{\varphi_1,\varphi_2}(g)=f_{\boldsymbol{R}}\left(\begin{pmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{pmatrix}g_{\boldsymbol{R}}\begin{pmatrix}\cos\varphi_2 & \sin\varphi_2\\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{pmatrix}\right)\prod_p f_p(g_p),$$

$\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 $H(\mu,\nu)$ 的一个标准正交基，$H(\mu,\nu)=H(0,\mu,\nu)$，$H(s,\mu,\nu)$ 为满足条件

$$\phi\left(\begin{pmatrix}a & x\\ 0 & b\end{pmatrix}g\right)=\mu(a)\nu(b)\left|\frac{a}{b}\right|_A^{s+1/2}\phi(g),$$

$$a,b\in A^\times,\ x\in A,\ g\in G(A)$$

及

$$\int_{K(A)} |\phi(k)|^2 \mathrm{d}k < +\infty$$

的 $G(A)$上的函数所组成的 Hilbert 空间，$\pi(s,\mu,\nu)$为 $G(A)$在空间 $H(s,\mu,\nu)$上的右正则表示，而对于 $H(s,\mu,\nu)$中的一个截面 ϕ 有

$$E(g,\phi,s,\mu,\nu) = \sum_{\gamma \in P(Q)\backslash G(Q)} \phi(\gamma g, s), \quad \mathrm{Re}\, s > 1/2,$$

且 $E(g,\phi,s,\mu,\nu)$可解析延拓至全复平面.

根据参考文献[42]，存在 $C_c^\infty(G(A))$上的一个连续拟范数 $\|\cdot\|_0$，一个 $G(A)$上的范数 $\|\cdot\|$，及一个常数 L，使得对于任意无穷次可微紧支集函数 f(其不一定 $K(A)$有限)成立

$$|K_{\mathrm{cont}}^f(h,g)| \leqslant \|f\|_0 \cdot \|g\|^L \|h\|^L.$$

这个上界证明了积分

$$\int_{Q\backslash A}\int_{Q\backslash A} K_{\mathrm{cont}}^f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(mx+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

绝对收敛，同时也给出了这个积分的一个估计 $O(\|f\|_0)$，其中 O 中的常数不依赖于函数 f 与参数 m 的选取.

§6　在 Kloosterman 和上的应用

在本节中我们首先介绍 Kuznetsov[7]所得到的迹公式谱分解的形式. 读者可参阅参考文献[90].

定理 1(Kuznetsov)　设$[0,+\infty)$上的函数 $\varphi(x)$具有三阶连续导数，并满足

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0,$$

及

$$\sum_{k=0}^{3}\left|\frac{\mathrm{d}^k\varphi}{\mathrm{d}x^k}\right| = O(x^{-B}), \quad x \to +\infty,$$

其中 $B>2$. 又设 $\varphi_H(x)$为 φ的 Bessel 变换

$$\varphi_H(x) = \varphi(x) - x\int_0^{+\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y\int_0^1 \xi J_0(x\xi)J_0(y\xi)\mathrm{d}\xi.$$

而 $\hat{\varphi}(r)$ $(r\in \boldsymbol{C})$为 φ 的另一个 Bessel 变换：

$$\hat{\varphi}(r) = \frac{\mathrm{i}\pi}{2\sinh \pi r}\int_0^{+\infty}(J_{2\mathrm{i}r}(x) - J_{-2\mathrm{i}r}(x))\varphi(x)\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

则

$$\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c}K(n,m;c)\varphi_H\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\right)$$

$$= -\frac{\delta_{n,m}}{2\pi}\int_0^{\infty}J_0(u)\varphi(u)\mathrm{d}u$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{m}{n}\right)^{\mathrm{i}r}\sigma_{2\mathrm{i}r}(n)\sigma_{-2\mathrm{i}r}(m)\frac{\hat{\varphi}(r)}{|\zeta(1+2\mathrm{i}r)|^2}\mathrm{d}r$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j(n)\overline{c_j(m)}}{\cosh\pi\nu_j}\hat{\varphi}(\nu_j),$$

其中 $c_j(n)$是 Maass 尖点形式 $f_j(z)$的 Fourier 系数，λ_j 为 f_j 在非欧 Laplace 算子作用下的特征值 $\Delta f_j=\lambda_j f_j$，$\nu_j^2+\frac{1}{4}=\lambda_j$，而 f_j 又是所有 Hecke 算子的特征函数，特征值即为 $c_j(n)$：$T(n)f_j=c_j(n)f_j$，又有 $c_j(1)=1$．(见第一章§15)

利用迹公式的这个形式，Kuznetsov 估计了

$$S_{n,m}(T) = \sum_{1\leqslant c\leqslant T}\frac{1}{c}K(n,m;c).$$

第一步是要选取一个函数 φ 使得

$$\mathfrak{Z}_{n,m}(\varphi) = \sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c}K(n,m;c)\varphi\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\right)$$

与 $S_{n,m}(T)$大小接近．为此我们取 $a=4\pi\sqrt{nm}$，并设 φ 无穷次可微且满足：

$\varphi(x)=1$，　　　　如果$\frac{a}{T}\leqslant x\leqslant a$；

$\varphi(x)=0$，　　　　如果 $x\geqslant 2a$；

$$\varphi(x)=0, \qquad \text{如果 } x\leqslant\frac{a}{T+T_0}\text{，其中 } T_0\ll T^{2/3}\text{待定；}$$

$$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1, \qquad \text{如果 } a\leqslant x\leqslant 2a \text{ 或 } \frac{a}{T+T_0}\leqslant x\leqslant\frac{a}{T}.$$

又设 $\varphi(x)$在$[a,2a]$与$\left[\frac{a}{T+T_0},\frac{a}{T}\right]$中单调，且

$$|\varphi'(x)|\ll\left(\frac{a}{T}-\frac{a}{T+T_0}\right)^{-1}\ll\frac{T^2}{aT_0}, \qquad \text{如果 } \frac{a}{T+T_0}\leqslant x\leqslant\frac{a}{T};$$

$$|\varphi'(x)|\ll\frac{1}{a}, \qquad \text{如果 } a\leqslant x\leqslant 2a.$$

因此对固定的 n,m 与 $T_0\gg T^{1/3}$成立

$$|\mathfrak{Z}_{n,m}(\varphi)-S_{n,m}(T)|\leqslant\sum_{T\leqslant c\leqslant T+T_0}\frac{1}{c}|K(n,m;c)|$$

$$\ll\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{T\leqslant c\leqslant T+T_0}\sigma_0(c),$$

这里我们利用了参考文献[81]中

$$|K(n,m;c)|\leqslant|c|^{1/2}\min\left\{\sqrt{(n,c)}\,\sigma_0\left(\frac{c}{(n,c)}\right),\right.$$

$$\left.\sqrt{(m,c)}\,\sigma_0\left(\frac{c}{(m,c)}\right)\right\}.$$

对于固定的 n 与 m，于是有$|K(n,m;c)|\ll|c|^{1/2}\sigma_0(c)$. 再根据对除数函数的和的经典估计，$|\mathfrak{Z}_{n,m}(\varphi)-S_{n,m}(T)|\ll\frac{T_0\log T}{\sqrt{T}}$.

下面我们考虑 $\mathfrak{Z}_{n,m}(\varphi)$与 $\mathfrak{Z}_{n,m}(\varphi_H)$之间的差距，即估计

$$x\int_0^\infty\varphi(y)\mathrm{d}y\int_0^1\xi J_0(x\xi)J_0(y\xi)\mathrm{d}\xi$$

的大小. 首先对所有 $\xi\geqslant 0$，成立$|J_0(x\xi)|\leqslant 1$. 其次因为$\int_0^\infty J_0(y)\mathrm{d}y$收敛，有

$$\left|\int_0^\infty\varphi(y)J_0(y\xi)\mathrm{d}y\right|\leqslant\max_{x>0}\left|\int_0^x J_0(y\xi)\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{1}{\xi}.$$

故上面积分顺序可交换且

$$\left| x\int_0^\infty \varphi(y)\mathrm{d}y\int_0^1 \xi J_0(x\xi)J_0(y\xi)\mathrm{d}\xi \right|$$

$$\leqslant \left| x\int_0^1 \xi \mathrm{d}\xi \int_0^\infty \varphi(y)J_0(y\xi)\mathrm{d}y \right| \ll x\int_0^1 \mathrm{d}\xi \ll x.$$

因此

$$|\varphi(x)-\varphi_H(x)| \ll x,$$

且对于固定的 n 与 m 成立

$$\mathfrak{Z}_{n,m}(\varphi)=\mathfrak{Z}_{n,m}(\varphi_H)+O\left(\sum_{c=1}^\infty \frac{1}{c^2}K(n,m;c)\right)$$

$$=\mathfrak{Z}_{n,m}(\varphi_H)+O(1).$$

上面对 $\varphi(y)J_0(y\xi)$ 积分的估计亦导出

$$\left| -\frac{\delta_{n,m}}{2\pi}\int_0^\infty J_0(u)\varphi(u)\mathrm{d}u \right| \ll O(1),$$

这里 $\delta_{n,m}$ 当 $n=m$ 时为 1，当 $n\neq m$ 时为 0. 为了估计剩下的两项，我们要用到 Bessel 函数的一个渐近公式（见参考文献[2]中§7.13.2 公式(17)）

$$J_{\mathrm{i}r}(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}(x^2+r^2)^{-r/4}\mathrm{e}^{\frac{\pi r}{2}-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}+\mathrm{i}\left(\sqrt{r^2+x^2}-r\log\left(\frac{r}{x}+\sqrt{\frac{r^2}{x^2}+1}\right)\right)}$$

$$\times\left(1+\frac{a_1}{\sqrt{r^2+x^2}}+\frac{a_2}{r^2+x^2}+\cdots\right),$$

其中 a_1 与 a_2 为常系数，当 $r\to+\infty$ 时这个渐近公式对所有 x 一致成立. 利用这个渐近公式，我们得到 $r\geqslant 1$ 时，

$$\int_0^\infty J_{2\mathrm{i}r}(x)\varphi(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} \ll \mathrm{e}^{\pi r}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+4r^2)^{r/2}},$$

故

$$|\hat{\varphi}(r)| \ll |r|^{-3/2}, \quad |r|\geqslant 1,$$

又有

$$|\hat{\varphi}(r)| \ll \frac{T}{T_0}|r|^{-5/2}, \quad |r|\geqslant 1.$$

如果 $|r|\leqslant 1$，则用 Bessel 函数的幂级数展开式可得

$$|\hat{\varphi}(r)| \ll |r|^{-2}.$$

由此积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\varphi}(r)|}{|\zeta(1+2ir)|^2} \mathrm{d}r$$

有限，且对任意 $M \geqslant 1$，利用 $|\hat{\varphi}(r)| \ll |r|^{-3/2}$ 得

$$\sum_{\nu_j \leqslant M} \left| \frac{c_j(n) \overline{c_j(m)}}{\cosh \pi \nu_j} \hat{\varphi}(\nu_j) \right| \ll \sqrt{M}.$$

而利用 $|\hat{\varphi}(r)| \ll \frac{T}{T_0} |r|^{-5/2}$ 可得

$$\sum_{\nu_j > M} \left| \frac{c_j(n) \overline{c_j(m)}}{\cosh \pi \nu_j} \hat{\varphi}(\nu_j) \right| \ll \frac{T}{T_0 \sqrt{M}}.$$

将上述估计加在一起，则对 n 与 m 我们得到

$$\left| \sum_{1 \leqslant c \leqslant T} \frac{1}{c} K(n,m;c) \right| \ll \frac{T_0}{\sqrt{T}} \log T + \sqrt{M} + \frac{T}{T_0 \sqrt{M}}.$$

取 $M = T/T_0$，再取 $T_0 = (T/\log T)^{2/3}$，则得

定理 2(Kuznetsov[7]) 对于固定的 $n, m \geqslant 1$，当 $T \to +\infty$ 时有

$$\left| \sum_{1 \leqslant c \leqslant T} \frac{1}{c} K(n,m;c) \right| \ll T^{1/6} (\log T)^{1/3}.$$

第五章　相对迹公式(几何部分)

从 Selberg 迹公式,GL(2)群上的迹公式到 Kuznetsov 迹公式,可以看出对积分算子的核函数进行不同方式的积分可以导出许多深刻的数论与群表示论的结果. 相对迹公式以其灵活性在近十几年来已成为数论与群表示论中的一个有效的方法. 其基本思想是在两个不同的群上对积分算子的核函数进行不同方式的积分,通过选取适当的函数使这两个积分相等,由此得出两个群上群表示谱分解的一个等式,从中推导出不同群的群表示之间的函子关系并对其进行描述.

另一方面,相对迹公式的方法应用起来有许多难点. 这也就是为何时至今日完全证明了的相对迹公式为数很少,且均为低秩的情况. 许多其他的相对迹公式仍处于证明的初始阶段,有许多工作有待完成. 本章仍循前几章的惯例,以一个相对简单的情况为例,介绍相对迹公式理论中的主要步骤、结论与证明. 在此之后再简单介绍若干已完全证明了的相对迹公式.

读者将会看到,由相对迹公式有时可以推出群表示的函子性与某种 L-级数解析性质之间的关系. 同时相对迹公式的证明过程中又往往会得到指数和之间的恒等式. 更进一步,一类相对迹公式等式的一边就是 Kuznetsov 迹公式. 这些都体现了相对迹公式与解析数论之间的可能的联系.

§1　二次扩域上 GL(2)群的相对迹公式①

设 $\eta=\prod_v \eta_v$ 为 $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ 上的一个非平凡实特征,则类域论指出

① 本节内容请见参考文献[59],[60]及[61].

如下结论：存在 F 的一个二次扩域 $E=F(\sqrt{\tau})$，$\tau\in F^{\times}$，使得 η 在$N_{E/F}(\mathbf{A}_E^{\times})F^{\times}$上恒等于 1. 取 $\psi=\prod\limits_v\psi_v$ 为 $\mathbf{A}_F/F$ 上一非平凡加性特征，$f=\prod\limits_v f_v$ 为 $G(\mathbf{A}_F)=\mathrm{GL}(2,\mathbf{A}_F)$上一无穷次可微且具有紧支集的函数. 设 $G_{0v}=\{g\in G(F_v)\mid\eta_v(\det g)=1\}$ 及 $G_0=\prod\limits_v G_{0v}$. 我们以下要求 f 的支集包含在 G_0 之中，即每一个局部函数 f_v 的支集均在 G_{0v}之中. 按照第四章定义

$$K^f(h,g)=\int_{Z(F)\backslash Z(\mathbf{A}_F)}\sum_{\xi\in G(F)}f(zh^{-1}\xi g)\eta(z)\mathrm{d}^{\times}z,$$

则此时的 Kuznetsov 迹公式为

$$\begin{aligned}&\int_{F\backslash\mathbf{A}_F}\int_{F\backslash\mathbf{A}_F}K^f\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}\right)\overline{\psi}(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad=\int_{F\backslash\mathbf{A}_F}\int_{F\backslash\mathbf{A}_F}K^f_{\mathrm{cusp}}\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}\right)\overline{\psi}(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\qquad+\int_{F\backslash\mathbf{A}_F}\int_{F\backslash\mathbf{A}_F}K^f_{\mathrm{cont}}\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}\right)\overline{\psi}(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

另一方面我们考虑 $G(E)$中可逆 Hermit 矩阵 $s={}^t\bar{s}$所组成的**代数簇** S. 设 $\Phi=\prod\limits_v\Phi_v$ 为 $S(\mathbf{A}_F)$上的一个无穷次可微紧支集函数，其局部函数 Φ_v 对几乎所有的 v 来说都是 $K(F_v)\cap S(F_v)$的特征函数. 定义核函数

$$K^{\Phi}(g)=\int_{Z(F)\backslash Z(\mathbf{A}_F)}\sum_{\gamma\in S(F)}\Phi(z\,{}^t\overline{g}\gamma g)\mathrm{d}^{\times}z$$

并考虑积分

$$\int_{E\backslash\mathbf{A}_E}K^{\Phi}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x.$$

因为函数 Φ 有紧支集，对于固定的 g，核函数 $K^{\Phi}(g)$定义式中的积分收敛、和式有限. 而由于 $E\backslash\mathbf{A}_E$ 紧致，对 $K^{\Phi}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}$ 的积分亦绝对收敛.

代数簇 $S(F)$中的 Hermit 矩阵可按合同类分类. 对GL(2,E)中的 Hermit 矩阵 s,它或与$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$合同：$s={}^t\bar{g}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}g$,或与某一对角矩阵合同：$s={}^t\bar{g}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}g$,其中 a_1,a_2 满足$a_1x\bar{x}+a_2y\bar{y}=0$只有零解 $x=y=0$ 的条件(见参考文献[62]). 可以证明,当$F_v\otimes_F E\cong F_v\oplus F_v$ 对所有 F 的 Archimedes 赋值 v 都成立时,即当 F 的所有 Archimedes 赋值都在 E 中分裂时,$S(F)$中只有一个合同类$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 在一般情况下,

$$K^{\Phi}(g) = \sum_{\epsilon} K_{\epsilon}(g),$$

其中 ϵ 取遍 $S(F)$中合同类的一个代表系,而

$$K_{\epsilon}(g) = \int_{Z(F)\backslash Z(A_F)} \sum_{K\in H_{\epsilon}(F)\backslash G(E)} \Phi(z\,{}^t\bar{g}\,{}^t\bar{k}\epsilon kg)\mathrm{d}^{\times}z,$$

这里 $H_{\epsilon}(F)$为 Hermit 矩阵 ϵ 所对应的酉群：

$$H_{\epsilon}(F)=\{g\in G(E)\mid {}^t\bar{g}\epsilon g=\epsilon\}.$$

因此

$$\int_{E\backslash A_E} K^{\Phi}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x = \sum_{\epsilon}\int_{E\backslash A_E} K_{\epsilon}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x.$$

我们以下考虑如此的函数 Φ,其在 ϵ 的合同类上由某一$G(A_E)$上的光滑具有紧支集的函数 f'_{ϵ} 通过

$$\int_{Z(A_F)} \Phi(z\,{}^t\bar{g}\,\epsilon g)\mathrm{d}z = \int_{H'_{\epsilon}(A_F)} f'_{\epsilon}(hg)\mathrm{d}h$$

给出,其中 $H'_{\epsilon}(F)=\{g\in G(E)\mid {}^t\bar{g}\epsilon g=\lambda\epsilon, \lambda\in Z(F)\}$为 ϵ 所对应的合同酉群. 可以证明,当 F 的所有 Archimedes 赋值都在 E 中分裂时,所有函数 Φ 都可表示成这种形式. 因此

$$\begin{aligned} K_{\epsilon}(g) &= \sum_{k\in Z(F)H_{\epsilon}(F)\backslash G(E)} \int_{Z(A_F)} \Phi(z\,{}^t(\overline{kg}))\epsilon kg)\mathrm{d}^{\times}z \\ &= \sum_{k\in Z(F)H_{\epsilon}(F)\backslash G(E)} \int_{H'_{\epsilon}(A_F)} f'_{\epsilon}(hkg)\mathrm{d}h. \end{aligned}$$

对于 GL(2)来说 $Z(E)H_\varepsilon(F)=H'_\varepsilon(F)$. 由于 $H'_\varepsilon(A_F)$为一幺模群,我们可将变量 h 换成 h^{-1},故

$$K_\varepsilon(g)=\sum_{k\in G(E)}\int_{H'_\varepsilon(F)\backslash H'_\varepsilon(A_F)} f'_\varepsilon(h^{-1}kg)\mathrm{d}h.$$

对每一个函数 f'_ε 定义

$$K^{f'_\varepsilon}(h,g)=\int_{Z(E)\backslash Z(A_F)}\sum_{\xi\in G(E)} f'_\varepsilon(zh^{-1}\xi g)\mathrm{d}z,$$

则
$$K^{\Phi}(g)=\sum_\varepsilon\int_{Z(A_E)H'_\varepsilon(F)\backslash H'_\varepsilon(A_F)} K^{f'_\varepsilon}(h,g)\mathrm{d}h,$$

同时

$$\int_{E\backslash A_E} K^{\Phi}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_\varepsilon\int_{E\backslash A_E}\int_{Z(A_E)H'_\varepsilon(F)\backslash H'_\varepsilon(A_F)} K^{f'_\varepsilon}\left(h,\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}h\mathrm{d}x.$$

我们的相对迹公式就是指对于如上给定的一个函数 f 可找到满足某些条件的函数 Φ 或 f'_ε 使得

$$\int_{F\backslash A_F}\int_{F\backslash A_F} K^f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\overline{\psi}(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

等于
$$\int_{E\backslash A_E} K^{\Phi}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x$$

或者

$$\sum_\varepsilon\int_{Z(A_E)H'(F)\backslash H'(A_F)}\int_{E\backslash A_E} K^{f'_\varepsilon}\left(g,\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g;$$

反之给定一个 Φ 或一组 f'_ε 可选取满足某些条件的函数 f 使得上式亦成立. 这里提到的某些条件我们后面几节再详述. 又对GL(2)来说我们可以只考虑 $\varepsilon=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 一种情况. 在一般的 GL(n)上的相对迹公式中对不同的 ε 求和是必要的. 以下我们永远取 $\varepsilon=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 并记 $f'=f'_\varepsilon$,同时假定函数 Φ 的支集包含在 $\varepsilon=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 的

合同类之中.

我们指出在映射

$$h \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h \begin{pmatrix} \sqrt{\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

之下 $H'_\varepsilon(F)$同构于 $Z(E)G(F)$. 因此 $Z(\boldsymbol{A}_F)H'(F)\backslash H'(\boldsymbol{A}_F)$可以写成 $Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)$. 这样相对迹公式可改写为

$$\int_{F\backslash \boldsymbol{A}_F}\int_{F\backslash \boldsymbol{A}_F} K^f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\overline{\psi}(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\int_{E\backslash \boldsymbol{A}_E} K^{f_1'}\left(g, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\psi\circ \mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g,$$

其中 $f_1'(g) = f_\varepsilon'\left(\begin{pmatrix} \sqrt{\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)$. 这种形式的相对迹公式见参考文献[60].

为了得到相对迹公式的谱分解部分,我们对核函数

$$K^{f_1'}\left(g, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = K_{\mathrm{cusp}}^{f_1'}\left(g, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + K_{\mathrm{cont}}^{f_1'}\left(g, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$+ K_{\mathrm{sp}}^{f_1'}\left(g, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

逐项进行积分. 首先

$$\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\int_{E\backslash \boldsymbol{A}_E} K_{\mathrm{sp}}^{f_1'}\left(g, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\psi\circ \mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g$$

$$= (\mathrm{vol}(Z(\boldsymbol{A}_E)G(E)\backslash G(\boldsymbol{A}_E)))^{-1}\sum_{\chi^2=1}\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\chi(\det g)\mathrm{d}g$$

$$\times \int_{E\backslash \boldsymbol{A}_E}\psi\circ \mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\int_{Z(\boldsymbol{A}_E)\backslash G(\boldsymbol{A}_E)} f_1'(y)\chi(\det y)\mathrm{d}y$$

$$= 0.$$

我们以后要证明积分

$$\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\int_{E\backslash \boldsymbol{A}_E} K_{\mathrm{cont}}^{f_1'}\left(g, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\psi\circ \mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g$$

收敛，故对 K^f_{cusp}类似的积分亦收敛. 因此相对迹公式的谱分解部分可写成

$$\int_{F\backslash A_F}\int_{F\backslash A_F} K^f_{\text{cusp}}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\bar{\psi}(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)}\int_{E\backslash A_E} K^{f'_1}_{\text{cusp}}\left(g,\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi\circ\operatorname{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g$$

$$=\int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)}\int_{E\backslash A_E} K^{f'_1}_{\text{cont}}\left(g,\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi\circ\operatorname{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g$$

$$-\int_{F\backslash A_F}\int_{F\backslash A_F} K^f_{\text{cont}}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\bar{\psi}(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

§2 轨道积分

本节我们计算积分

$$\int_{E\backslash A_E} K^{\Phi}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\psi\circ\operatorname{tr}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{E\backslash A_E}\int_{Z(F)\backslash Z(A_F)}\sum_{\gamma\in S(F)}\Phi\left(z\,{}^{\mathrm{t}}\overline{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\gamma\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\psi\circ\operatorname{tr}(x)\mathrm{d}^{\times}z\mathrm{d}x.$$

首先称 $\gamma\in S(F)$为一个相关元素，如果对于满足 ${}^{\mathrm{t}}\overline{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\gamma\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\gamma$ 的 x，$\psi\circ\operatorname{tr}(x)$恒等于 1. 由上面的整体积分可以看出，如果 γ 不是相关元素，对 x 的积分等于零. 故上式中的和式可在$S(F)$中的相关元素 γ 上取. 我们需要 $S(F)$的一个不相交分解，这个不相交分解的一般情形在参考文献[63]，[64]，以及[65]中被证明. GL(2)的情形可以直接证明：

引理 $S(F)$中每一个相关元素 γ 均可写为 $\gamma={}^{\mathrm{t}}\bar{n}wan$，其中 $n\in N(E)$，$w=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$a=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_1\end{pmatrix}$，或 $w=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$a=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}$，

$a_1, a_2 \in F^\times$.

根据这个引理，上面的整体积分等于

$$\sum_{w}\sum_{a}\int_{Z(F)\backslash Z(A_F)}\int_{E\backslash A_E}\sum_{\substack{\gamma\in S(F)\\ \gamma={}^t\bar{n}wan}}\Phi\left(z\,{}^t\overline{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\gamma\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ \psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times z,$$

其中 w 与 a 按引理取. 当 $w=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=w_1, a=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_1\end{pmatrix}, a_1\in F^\times$ 时，$\gamma=a_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & y\end{pmatrix}, y\in F$. 故此时我们得到

$$\sum_{a\in F^\times}\int_{Z(F)\backslash Z(A_F)}\int_{A_F}\Phi\left(zw_1\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times z$$

$$=\int_{Z(A_F)}\int_{A_F}\Phi\left(zw_1\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times z,$$

其中 $w_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. 当 $w=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, a=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}, a_1, a_2\in F^\times$ 时，方程 ${}^t\bar{n}wan=wa$ 只有平凡解 $n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，故我们得到

$$\sum_{a\in F^\times}\int_{Z(A_F)}\int_{A_E}\Phi\left(z\begin{pmatrix}1 & 0\\ \bar{x} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times z.$$

因此

$$\int_{E\backslash A_E}K^\Phi\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x=\sum_{a\in F^\times}J\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\Phi\right)+J(w_1,\Phi),$$

其中

$$J(w_1,\Phi)=\int_{Z(A_F)}\int_{A_F}\Phi\left(zw_1\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times z$$

与

$$J\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\Phi\right)=\int_{Z(A_F)}\int_{A_E}\Phi\left(z\begin{pmatrix}1 & 0\\ \bar{x} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\ \psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times z$$

被称作轨道积分.

回忆第四章§1中 Kuznetsov 迹公式可写成

$$\int_{F\backslash A_F}\int_{F\backslash A_F} K^f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\overline{\psi}(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= I(w_1,f_1) + \sum_{a\in F^\times} I\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},f_1\right),$$

其中

$$I(w_1,f_1) = \int_{Z(A_F)}\int_{A_F} f_1\left(zw_1\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\eta(z)\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times z$$

与

$$I\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},f_1\right) = \int_{Z(A_F)}\int_{A_F}\int_{A_F} f_1\left(z\,{}^t\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$
$$\times\ \eta(z)\psi(x+y)\mathrm{d}^\times z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

为 Kuznetsov 迹公式的轨道积分,这里 $f_1(g)=f(w_1g)$. 因此相对迹公式的证明就归结为证明相应的轨道积分相等

$$I(w_1,f_1) = J(w_1,\Phi),\quad w_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$
$$I\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},f_1\right) = J\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\Phi\right),\quad a\in F^\times.$$

我们曾假设函数 f 的支集包含于 G_0. 故当 $-a\notin N_{E/F}(E^\times)$ 时 $f_1\left(z\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=0$ 且 $I\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},f_1\right)=0$. 另一方面,当 $-a\notin N_{E/F}(E^\times)$ 时 $J\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\Phi\right)$ 亦等于零,因为我们假设 Φ 的支集包含于 $\left\{{}^t\overline{g}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}g \,\middle|\, g\in G(A_E)\right\}$. 由于这些轨道积分均可写为局部积分的乘积,相对迹公式的证明就变成局部积分之间的等式

$$I_v(w_1,f_{1v}) = J_v(w_1,\Phi_v),\quad w_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$c_v I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_{1v}\right) = J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right), \quad a \in F_v^{\times},$$

其中 c_v 为一个常数系数，满足 $\prod_v c_v = 1$. 换句话说，相对迹公式中的函数关系 $f \leftrightarrow \Phi$ 应该由局部函数关系 $f_{1v} \leftrightarrow \Phi_v$ 构成. 这局部函数要求给定 f_{1v} 可找到 Φ_v 使得上面二式成立，反之给定 Φ_v 后可以找到 f_{1v} 使得上面二式亦成立.

在考虑局部积分之间的等式时，我们要注意以下情况：当 F 的赋值 v 在 E 中不分裂时，$E \otimes_F F_v$ 为 F_v 的一个二次扩域，因此 $S(F_v)$ 为 $G(E_v)$ 中的可逆 Hermit 矩阵所组成的代数簇，故可设 Φ_v 为 $S(F_v)$ 上的一个无穷次可微有紧支集的函数，而局部积分等于

$$J_v(w_1, \Phi_v) = \int_{Z(F_v)} \int_{F_v} \Phi_v\left(z w_1 \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_v(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}^{\times} z,$$

$$J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right) = \int_{Z(F_v)} \int_{E_v} \Phi_v\left(z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$\times \psi_v \circ \mathrm{tr}_{E_v/F_v}(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}^{\times} z,$$

其中 $w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in F_v^{\times}$. 当 F 的赋值 v 在 E 中分裂时，$E \otimes_F F_v = E_{v_1} \oplus E_{v_2}$ 同构于 $F_v \oplus F_v$. 此时

$$S(F_v) = \{(s, {}^t s) \mid s \in G(F_v)\}$$

同构于 $G(F_v)$，而对于 $\varepsilon = (s, {}^t s) \in S(F_v)$ 来说，

$$H_\varepsilon(F_v) = \{(h, {}^t s^{-1}\, {}^t h^{-1}\, {}^t s) \mid h \in G(F_v)\}.$$

事实上为了得到 v 不分裂时类似 $H_\varepsilon(F_v)$ 的定义式 ${}^t\bar{h} \varepsilon h = \varepsilon$，我们需要

$$({}^t({}^t s^{-1}\, {}^t h^{-1}\, {}^t s), {}^t h)(s, {}^t s)(h, {}^t s^{-1}\, {}^t h^{-1}\, {}^t s) = (s, {}^t s),$$

即

$${}^t({}^t s^{-1}\, {}^t h^{-1}\, {}^t s) s h = s$$

与

$${}^t h\, {}^t s ({}^t s^{-1}\, {}^t h^{-1}\, {}^t s) = {}^t s.$$

因此

$$H_{(s,{}^ts)}(F_v) = \{(h, {}^ts^{-1}\,{}^th^{-1}\,{}^ts) \mid h \in G(F_v)\}.$$

因此我们可以认为 Φ_v 为 $G(F_v)$ 上的函数而其局部积分为

$$J_v(w_1, \Phi_v) = \int_{Z(F_v)}\int_{F_v} \Phi_v\left(z w_1 \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \psi_v(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}^\times z,$$

$$J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v \right) = \int_{Z(F_v)}\int_{F_v}\int_{F_v} \Phi_v\left(z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \times \psi_v(x+y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}^\times z,$$

其中 $w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in F_v^\times$.

当 v 在 E 中分裂时比较局部积分 I_v 与 J_v，我们可以看出 $I_v(w_1, f_{1v})$ 与 $J_v(w_1, \Phi_v)$，$I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_{1v} \right)$ 与 $J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v \right)$ 都具有同一个表达式，因为此时积性特征 η_v 为平凡特征. 故要使这两组局部积分相等，我们可直接取 $f_{1v} = \Phi_v$.

§3 基 本 引 理

要比较当 v 在 E 中不分裂时的局部积分，我们还要对局部函数的对应关系提出其他的要求. 首先，由于对几乎所有的 v 来说，f_{1v} 为 $K(F_v)$ 的特征函数 f_{0v} 而 Φ_v 为 $K(E_v) \cap S(F_v)$ 的特征函数 Φ_{0v}，我们要求这两个特征函数 f_{0v} 与 Φ_{0v} 满足局部函数的对应关系

$$I_v(w_1, f_{0v}) = J_v(w_1, \Phi_{0v}), \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_{0v} \right) = J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_{0v} \right), \quad a \in F_v^\times.$$

对于 GL(2)，我们可用初等方法证明 Cartan 不相交分解

$$G(F_v) = \bigcup_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{Z} \\ \lambda_1 \leq \lambda_2}} K(F_v) \begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{pmatrix} K(F_v).$$

因此如果函数 f_{1v}左右 $K(F_v)$不变时，f_{1v}可看成 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 上的一个函数，满足 $f_{1v}(\lambda_1,\lambda_2)=f_{1v}(\lambda_2,\lambda_1)$，且仅在有限对$(\lambda_1,\lambda_2)$上函数值非零. 这样的函数 f_{1v}被称作球面函数. 在以卷积为乘法时，它们组成一个代数 $\mathscr{H}(G(F_v),K(F_v))$，叫做 **Hecke 代数**.

这个 Hecke 代数是一个交换代数. 为证明这一点，我们定义一个从 Hecke 代数 $\mathscr{H}(G(F_v),K(F_v))$到 $\mathscr{H}(A(F_v),A(F_v)\cap K(F_v))$的一个线性映射：

$$Sf(a)=\delta(a)^{1/2}\int_{N(F_v)}f(an)\mathrm{d}n,\quad a\in A(F_v),$$

其中

$$\delta\left(\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\right)=\left|\frac{a_1}{a_2}\right|_v.$$

这里 $\mathscr{H}(A(F_v),A(F_v)\cap K(F_v))$为 $A(F_v)$上在 $A(F_v)\cap K(F_v)$作用下不变的紧支集函数组成的代数. 这个线性映射叫做 Satake 变换(见参考文献[66])，这个线性映射同时又是 Hecke 代数的一个同态，这可以通过直接验证

$$S(f*g)=(Sf)*(Sg)$$

而得到.

我们进一步看到当 $\frac{a_1}{a_2}\in R_v$ 时，

$$\begin{aligned}Sf\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}&=\left|\frac{a_1}{a_2}\right|_v^{1/2}\int_{F_v}f\left(\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}x\\&=\left|\frac{a_2}{a_1}\right|_v^{1/2}\int_{F_v}f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}x\\&=\left|\frac{a_2}{a_1}\right|_v^{1/2}\left(f\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}+\int_{x\notin R_v}f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

由于$\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1/x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/x & 0\\ 1 & x\end{pmatrix}$，上式最后一积分等于

$$\int_{x\notin R_v}f\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{x} & 0\\ 1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}x=\int_{x\notin R_v}f\left(\begin{pmatrix}\frac{a_1}{x} & 0\\ 0 & a_2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{a_1}{xa_2} & 1\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x\in R_v} f\begin{pmatrix} \frac{a_1}{x} & 0 \\ 0 & a_2 x \end{pmatrix} \mathrm{d}x = \int_{x\in R_v} f\begin{pmatrix} a_2 x & 0 \\ 0 & \frac{a_1}{x} \end{pmatrix} \mathrm{d}x.$$

另一方面，由于$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，有

$$\int_{x\in R_v} f\left(\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \mathrm{d}x = \int_{x\in R_v} f\left(\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x\in R_v} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_1}{a_2 x} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 x & 0 \\ 0 & \frac{a_1}{x} \end{pmatrix}\right) \mathrm{d}x = \int_{x\in R_v} f\begin{pmatrix} a_2 x & 0 \\ 0 & \frac{a_1}{x} \end{pmatrix} \mathrm{d}x.$$

故

$$Sf\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \left|\frac{a_2}{a_1}\right|_v^{1/2} \left(f\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \int_{x\in R_v} f\begin{pmatrix} a_2 x & 0 \\ 0 & \frac{a_1}{x} \end{pmatrix} \mathrm{d}x \right)$$

$$= \left|\frac{a_2}{a_1}\right|_v^{1/2} \int_{F_v} f\left(\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \mathrm{d}x = Sf\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}.$$

这就推导出 Satake 变换的像永远满足 $Sf\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = Sf\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$.

记 $\mathscr{H}(A(F_v), A(F_v)\cap K(F_v))$中满足 $f\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$ 的函数组成的子代数为 $\mathscr{H}^w(A(F_v), A(F_v)\cap K(F_v))$.

我们最后要证明 $S: \mathscr{H}(G(F_v), K(F_v)) \to \mathscr{H}^w(A(F_v), A(F_v)\cap K(F_v))$是一个一一对应. 将 $Sf\begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{pmatrix}$ 简写为 $Sf(\lambda_1, \lambda_2)$，则对于 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 依前面计算

$$Sf(\lambda_1, \lambda_2) = \left|\frac{\varpi_v^{\lambda_1}}{\varpi_v^{\lambda_2}}\right|_v^{1/2} \left(f(\lambda_1, \lambda_2) + \sum_{n\geq 1} \int_{\varpi_v^{-n} R_v^\times} f\begin{pmatrix} a_1 x & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{x} \end{pmatrix} \mathrm{d}x \right)$$

$$= q_v^{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}}\left(f(\lambda_1,\lambda_2) + (1-q_v^{-1})\sum_{n\geq 1} q_v^n f(\lambda_1 - n, \lambda_2 + n) \right).$$

由此可看出 S 为满映射. 又有

$$Sf(\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1)$$
$$= q_v^{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}}\left(q_v f(\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1) + (1 - q_v^{-1}) \right.$$
$$\left. \times \sum_{n\geq 1} q_v^{n+1} f(\lambda_1 - n - 1, \lambda_2 + n + 1) \right),$$

与前式相减得到

$$Sf(\lambda_1,\lambda_2) - Sf(\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1)$$
$$= q_v^{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}}(f(\lambda_1,\lambda_2) - f_1(\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1))$$

(见参考文献[67],其推广见[68]). 因此

$$f(\lambda_1,\lambda_2) = q_v^{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}(Sf(\lambda_1,\lambda_2) - (q_v - 1)$$
$$\times \sum_{n\geq 1} q_v^{-n} Sf(\lambda_1 - n, \lambda_2 + n)).$$

因为 f 与 Sf 均有紧支集,以上的和式均只有有限非零项. 这就证明了 Satake 映射为单映射. (对于 Satake 变换在一般情形下的证明亦可见参考文献[69].)

当 F 的赋值 v 在 E 中不分裂且为非分歧时,我们亦可以考虑 $\mathscr{H}(G(E_v),K(E_v))$上的 Satake 变换:

$$Sf'\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \left|\frac{a_1}{a_2}\right|_{E_v}^{1/2}\int_{E_v} f'\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\mathrm{d}x,$$
$$a_1, a_2 \in E_v^{\times}.$$

同样可以证明 Hecke 代数 $\mathscr{H}(G(E_v), K(E_v))$ 同构于 $\mathscr{H}^w(A(E_v), A(E_v)\cap K(E_v))$,同为交换代数. 我们定义从 Hecke 代数 $\mathscr{H}(G(E_v),K(E_v))$到 $\mathscr{H}(G(F_v),K(F_v))$上的一个映射 b 并称其为**基变换映射**:

$$b:\ f' \mapsto f,$$

其由

$$Sf(\lambda_1,\lambda_2)=\begin{cases}Sf'(\lambda_1/2,\lambda_2/2), & \text{如果 } \lambda_1\equiv\lambda_2\equiv 0(\operatorname{mod} 2),\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

给出（见参考文献[29]）. 对于 GL(2)来说，Hecke 代数的基变换映射亦可由下列式子直接给出（见参考文献[68]）：

$$f(\lambda_1,\lambda_2)=0,\quad \lambda_1+\lambda_2\not\equiv 0\ (\operatorname{mod} 2);$$

$$\begin{aligned}&f(2\lambda_1,2\lambda_2)-f(2\lambda_1-1,2\lambda_2+1)\\&\qquad=q_v^{-1}(f(2\lambda_1,2\lambda_2)-f(2\lambda_1+1,2\lambda_2-1)),\\&\qquad\qquad\qquad\text{如果 } \lambda_1<\lambda_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&f'(\lambda_1,\lambda_2)-f'(\lambda_1-1,\lambda_2+1)\\&\qquad=f(2\lambda_1,2\lambda_2)-f(2\lambda_1-1,2\lambda_2+1)\\&\qquad\quad-q_v^2(f(2\lambda_1-2,2\lambda_2+2)-f(2\lambda_1-3,2\lambda_2+3)),\\&\qquad\qquad\qquad\text{如果 } \lambda_1\leqslant\lambda_2.\end{aligned}$$

上面第一式对函数 f 的要求与我们的假设相吻合，即 f 的支集包含于$\{g\in G(F_v)\mid\eta_v(\det g)=1\}$.

现在我们可以回到局部积分的等式上去了. 我们要求，当 $f'\in\mathscr{H}(G(E_v),K(E_v))$为一球面函数时，$f'$通过

$$\int_{Z(F_v)}\Phi_v\left(z\,{}^t\bar{g}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}g\right)\mathrm{d}z=\int_{H'_{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}(F_v)}f'(hg)\mathrm{d}h$$

定义的函数 Φ_v 与通过基变换映射定义的函数 $f_v=b(f')$满足

$$I_v(w_1,f_v)=J_v(w_1,\Phi_v),\quad w_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

$$I_v\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix},f_v\right)=J_v\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix},\Phi_v\right),\quad a\in F_v^\times.$$

这里 $H'_{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}(F_v)$为$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$所对应的合同酉群：

$$H'_{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}(F_v)=\left\{g\in G(E_v)\,\middle|\,{}^t\bar{g}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}g=\lambda\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\lambda\in Z(F)\right\}.$$

这个当赋值 v 在 E 中不分裂非分歧时对 Hecke 代数中的函数的

要求,叫做相对迹公式的**基本引理**. 当 f' 为 $K(E_v)$的特征函数时,可以看出 Φ_v 为 $S(F_v)\cap K(E_v)$的特征函数 Φ_{0v}而 f_v 为 $K(F_v)$的特征函数. 故前面对于 Φ_{0v}与 f_{0v}所要求成立的局部积分等式实际上为基本引理的一个特例,通常称此为对 Hecke 代数单位元素的基本引理. 要建立一个相对迹公式,或迹公式,第一步要证明的就是 Hecke 代数单位元素的基本引理,第二步则就是证明整个基本引理.

§4 基 变 换

为什么基本引理在迹公式与相对迹公式理论中有这么大的重要性? 原因是基本引理中所要求的 Hecke 代数的基变换映射实际上是群表示基变换的对偶. 具体来说,给定一个 $G(\mathbf{A}_F)$ 在 $L_0^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F),\eta)$上的一个不可约尖点表示 σ,则存在 F 的赋值 v 组成的一个有限集合 S,使得 σ 包含 $K^S=\prod_{v\notin S}K(F_v)$的单位表示. 取 $v\notin S$,则 $\sigma=\bigotimes_v\sigma_v$ 在 F_v 上的局部表示 σ_v 包含 $K(F_v)$的单位表示. 如果 $f_v\in\mathscr{H}(G(F_v),K(F_v))$是一个球面函数,左右 $K(F_v)$ 不变,则算子 $\sigma_v(f_v)$在 σ_v 的空间上的作用变成

$$\sigma_v(f_v)\phi=\hat{\sigma}_v(f_v)\cdot\phi,$$

其中 $\hat{\sigma}_v$ 为与局部群表示 σ_v 对应的 Hecke 代数 $\mathscr{H}(G(F_v),K(F_v))$的一个特征,即 $\hat{\sigma}$ 是从 $\mathscr{H}(G(F_v),K(F_v))$到 $\mathbf{C}^\times$的一个同态.

与此类似我们可考虑 $G(\mathbf{A}_E)$在 $L_0^2(G(E)\backslash G(\mathbf{A}_E),1)$上的一个不可约尖点表示 ρ,则存在 E 赋值 w 组成的一个有限集合 T 使得 ρ 包含 $K^T=\prod_{w\notin T}K(E_w)$的单位表示. 取 $w\notin T$, $f'_w\in\mathscr{H}(G(E_w),K(E_w))$,则对任意 ρ_w 的空间中的 ϕ' 有

$$\rho_w(f'_w)\phi'=\hat{\rho}_w(f'_w)\cdot\phi',$$

其中 $\hat{\rho}_w$ 是 ρ_w 所对应的 Hecke 代数 $\mathscr{H}(G(E_w),K(E_w))$的一个特征.

取 $v\notin S$,v 在 E 中不分裂非分歧,并使 $F_v\otimes_F E=E_w$ 的赋值 $w\notin T$. 如果函数 $f_v\in\mathscr{H}(G(F_v),K(F_v))$与 $f'_w\in\mathscr{H}(G(E_w),K(E_w))$之间的关系由 Hecke 代数的基变换映射给出 $f_v=b(f'_w)$,则由$\mathscr{H}(G(F_v),K(F_v))$的特征 $\hat{\sigma}_v$ 可得 $\mathscr{H}(G(E_w),K(E_w))$的一特征 $\hat{\rho}_w$:

$$\hat{\rho}_w(f'_w)=\hat{\sigma}_v(b(f_v)).$$

由于群表示 σ_v 与 ρ_w 分别由其特征 $\hat{\sigma}_v$ 与 $\hat{\rho}_w$ 惟一给出,以上描述的映射 $\hat{\sigma}_v\mapsto\hat{\rho}_w$ 就导出群表示 σ_v 到 ρ_w 的一个映射,这就是群表示局部基变换.

当 $v\in S$ 或 $w\in T$ 或 v 在 E 中分裂或分歧时,我们亦可定义局部基变换.我们更可进一步定义整体基变换 $\sigma\mapsto\rho$,使得 L-级数 $L(s,\sigma)L(s,\sigma\otimes\eta)$与$L(s,\rho)$实际上相等.关于基变换的确切定义、证明与推广,读者可参看参考文献[70],[25]及[29]等著作,本书对基变换的介绍尽可能通俗易懂.

我们建立这个相对迹公式的最终目的是为了证明二次扩域上的 GL(2)的基变换并且描述其映像.因此相对迹公式中必然包含了关于 Hecke 代数基变换映射的要求.下面我们会看到,在应用相对迹公式研究基变换时,我们恰恰要用到上述 Hecke 代数特征之间的关系

$$\hat{\rho}_w(f'_w)=\hat{\sigma}_v(b(f_v)).$$

这说明了基本引理在迹公式与相对迹公式中的重要性.

§5 指数和展开

轨道积分的指数和展开的方法,我们在第四章中曾经用过.设

v 为 F 的一个非 Archimedes 赋值. 对于 $I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_{1v}\right)$ 来说，由于 f_{1v}是一个有紧支集的局部常数函数，存在 $K(F_v)$的一个开紧子群 K_0，使得 f_{1v}在 K_0 下左不变. 记 f_0 为 K_0 的特征函数，则 $f_{1v}=\mathrm{vol}(K_0)^{-1} f_0 * f_{1v}$. 将这个卷积表达式带入轨道积分 $I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_{1v}\right)$ 中，则得

$$I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_{1v}\right) = \mathrm{vol}(K_0)^{-1}\int_{Z(F_v)}\int_{F_v}\int_{F_v}\int_{G(F_v)} f_0\left(z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}g^{-1}\right)$$
$$\times f_{1v}(g)\eta_v(z)\psi_v(x+y)\mathrm{d}g\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}^{\times}z.$$

取 $g=k_0k\begin{bmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k_0\in K_0, k\in K_0\backslash K(F_v), \lambda_1,\lambda_2\in \mathbf{Z}$, $n\in F_v$，则 $\mathrm{d}g=q_v^{\lambda_2-\lambda_1}\mathrm{d}k_0\mathrm{d}n$，且

$$I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_{1v}\right) = \sum_{\substack{k\in K_0\backslash K(F_v)\\ \lambda_1,\lambda_2\in \mathbf{Z}}} q_v^{\lambda_2-\lambda_1}\int_{Z(F_v)}\int_{F_v}\int_{F_v}\int_{F_v}$$
$$f_0\left[z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \varpi_v^{-\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{-\lambda_2} \end{bmatrix}k^{-1}\right]$$
$$\times f_{1v}\left[k\begin{bmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\eta_v(z)\psi_v(x+y)\mathrm{d}n\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}^{\times}z.$$

用新变数 $u=y-n$，则得

$$I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_{1v}\right) = \sum_{\substack{k\in K_0\backslash K(F_v)\\ \lambda_1,\lambda_2\in \mathbf{Z}}} q_v^{\lambda_2-\lambda_1}\Psi_{f_{1v}}\left[k\begin{bmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{bmatrix}\right]$$
$$\times\int_{Z(F_v)}\int_{F_v}\int_{F_v} f_0\left[z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \varpi_v^{-\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{-\lambda_2} \end{bmatrix}k^{-1}\right]$$
$$\times \eta_v(z)\psi_v(x+u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u\mathrm{d}^{\times}z,$$

其中

$$\Psi_f(g)=\int_{F_v} f\left(g\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_v(n)\mathrm{d}n.$$

再作变量替换 $y=u\,\varpi_v^{\lambda_1-\lambda_2}$,则得轨道积分的指数和展开(见参考文献[52]):

定理 1 设 v 为 F 的一个非 Archimedes 赋值. 如果 f_v 对 $K(F_v)$的一个开紧子群 K_0 左不变,则

$$I_v\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},f_{1v}\right)=\sum_{\substack{k\in K_0\backslash K(F_v)\\ \lambda_1,\lambda_2\in \mathbf{Z}}}\Psi_{f_{1v}}\left[k\begin{bmatrix}\varpi_v^{\lambda_1} & 0\\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2}\end{bmatrix}\right]$$

$$\times\int\limits_{\substack{x,y\in F_v\\ z\in F_v^\times\\ z\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\varpi_v^{-\lambda_1} & 0\\ 0 & \varpi_v^{-\lambda_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in K_0k}}\eta_v(z)\psi_v(x+y\,\varpi_v^{\lambda_2-\lambda_1})$$

$$\times\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}^\times z.$$

又

$$I_v(w_1,f_{1v})=\int_{Z(F_v)}\Psi_{f_{1v}}(zw_1)\eta_v(z)\mathrm{d}^\times z,\quad w_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

当 $K_0=K(F_v)$时上面第一式右边的积分与 Kloosterman 和的积分形式相同(见参考文献[70]). 当 $K_0\neq K(F_v)$时,我们可以称这个积分为不完全 Kloosterman 和(见第四章§3).

与此类似,对于轨道积分 $J_v\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\Phi_v\right)$,我们有下列结果.

引理 设 f'_w 在 $K(E_w)$的一个开紧子群 K_1 下左不变,且

$$\int_{Z(F_v)}\Phi_v\left(z\,{}^t\bar{g}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}g\right)\mathrm{d}^\times z=\int_{H'_{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}(F_v)}f'_w(hg)\mathrm{d}h.$$

又设 Φ_1 为 $K_2=\left\{{}^t\bar{x}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}x\,\middle|\,x\in K_1\right\}$的特征函数,则

$$\int_{Z(F_v)}\Phi_v(zs)\mathrm{d}^\times z = \mathrm{vol}(Z(F_v)\cap K_2)^{-1}\mathrm{vol}(K_1)^{-1}$$

$$\times\int_{Z(F_v)}\int_{G(E_w)}\Phi_1(z\,{}^t\bar{x}^{-1}sx^{-1})f'_w(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times z.$$

证明 取 $s={}^t\bar{g}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}g$,则

$$\mathrm{vol}(Z(F_v)\cap K_2)^{-1}\mathrm{vol}(K_1)^{-1}\int_{Z(F_v)}\int_{G(E_w)}$$

$$\Phi_1\left(z\,{}^t\bar{x}^{-1}\,{}^t\bar{g}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}gx^{-1}\right)f'_w(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times z$$

$$=\mathrm{vol}(Z(F_v)\cap K_2)^{-1}\mathrm{vol}(K_1)^{-1}\int_{Z(F_v)}\int_{G(E_w)}$$

$$\Phi_1\left(z\,{}^t\bar{x}^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}x^{-1}\right)f'_w(xg)\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times z.$$

由 Φ_1 的定义可知 $x=yh,y\in K_1,h\in H'_{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}(F_v)$.故上式等于

$$\mathrm{vol}(Z(F_v)\cap K_2)^{-1}\mathrm{vol}(K_1)^{-1}\int_{Z(F_v)}\int_{K_1}\int_{H'_{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}(F_v)}$$

$$\Phi_1\left(z\lambda(h^{-1})\,{}^t\bar{y}^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}y^{-1}\right)f'_w(yhg)\mathrm{d}h\mathrm{d}y\mathrm{d}^\times z,$$

其中 ${}^t\bar{h}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}h=\lambda(h)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.对 z 进行变量替换.由于 f'_w 左 K_1 不变,我们对 y 与 z 积分后得到

$$\int_{H'_{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}(F_v)}f'_w(hg)\mathrm{d}h=\int_{Z(F_v)}\Phi_v\left(z\,{}^t\bar{g}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}g\right)\mathrm{d}^\times z.$$

证毕.

利用这个引理

$$J_v\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix},\Phi_v\right)=\mathrm{vol}(Z(F_v)\cap K_2)^{-1}\mathrm{vol}(K_1)^{-1}$$

$$\times \int_{Z(F_v)}\int_{E_w}\int_{G(E_w)} \Phi_1\left(z\,{}^{t}\bar{g}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g^{-1}\right)$$

$$\times f'_w(g)\psi_v \circ \operatorname{tr}(x)\mathrm{d}g\mathrm{d}x\mathrm{d}^{\times}z.$$

设 $g=k_1k\begin{bmatrix} \varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k_1\in K_1, k\in K_1\backslash K(E_w), \lambda_1,\lambda_2\in \mathbf{Z}$, $n\in E_w$，则 $\mathrm{d}g=q_{E_w}^{\lambda_2-\lambda_1}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}n$. 对 k_1 积分后有

$$J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\Phi_v\right)=\operatorname{vol}(Z(F_v)\cap K_2)^{-1}\sum_{k\in K_1\backslash K(E_w)} q_{E_w}^{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$\times \int_{Z(F_v)}\int_{E_w}\int_{E_w}\Phi_1\left[z\,{}^{t}\bar{k}^{-1}\begin{bmatrix} \overline{\varpi}_{E_w}^{-\lambda_1} & 0 \\ 0 & \overline{\varpi}_{E_w}^{-\lambda_2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\bar{n} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \varpi_{E_w}^{-\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{-\lambda_2} \end{bmatrix} k^{-1}\right]$$

$$\times f'_w\left[k\begin{bmatrix} \varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\psi \circ \operatorname{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}n\mathrm{d}^{\times}z,$$

其中 ϖ_{E_w} 为局部域 E_w 的一个素元素，而 $\overline{\varpi}_{E_w}$ 为 ϖ_{E_w} 在 Galois 群作用下的共轭. 作变量替换 $y=x-n$，得

$$J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\Phi_v\right)=\operatorname{vol}(Z(F_v)\cap K_2)^{-1}\sum_{\substack{k\in K_1\backslash K(E_w)\\ \lambda_1,\lambda_2\in \mathbf{Z}}} q_{E_w}^{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$\times \Psi'_{f_w}\left[k\begin{bmatrix} \varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2} \end{bmatrix}\right]$$

$$\times \int_{Z(F_v)}\int_{E_w}\Phi_1\left[z\,{}^{t}\bar{k}^{-1}\begin{bmatrix} \overline{\varpi}_{E_w}^{-\lambda_1} & 0 \\ 0 & \overline{\varpi}_{E_w}^{-\lambda_2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{y} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{bmatrix} \varpi_{E_w}^{-\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{-\lambda_2} \end{bmatrix} k^{-1}\right]\psi_v \circ \operatorname{tr}(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}^{\times}z,$$

其中

$$\Psi'_{f'_w}(g)=\int_{E_w}f'_w\left(g\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\right)\psi_v\circ\mathrm{tr}(n)\mathrm{d}n.$$

再作变量替换 $x=y\,\varpi_{E_w}^{\lambda_1-\lambda_2}$，我们就得到了 J_v 的指数和展开.

定理 2 设 v 为 F 的一个非 Archimedes 赋值，其在 E 中不分裂. 如果 f'_w 对 $K(E_w)$的一个开紧子群 K_1 左不变而

$$\int_{Z(F_v)}\Phi_v\left(z\,{}^{\mathrm t}\bar g\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}g\right)\mathrm{d}^{\times}z=\int_{H'_{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}(F_v)}f'_w(hg)\mathrm{d}h,$$

则

$$J_v\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix},\Phi_v\right)=\mathrm{vol}(Z(F_v)\cap K_2)^{-1}$$

$$\times\sum_{\substack{k\in K_1\backslash K(E_w)\\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbf Z}}\Psi'_{f'_w}\left(k\begin{pmatrix}\varpi_{E_w}^{\lambda_1}&0\\0&\varpi_{E_w}^{\lambda_2}\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\int\psi_v\circ\mathrm{tr}(x\,\varpi_{E_w}^{\lambda_2-\lambda_1})\mathrm{d}x\mathrm{d}^{\times}z,$$

其中最后一个积分在 $x\in E_w, z\in Z(F_v)$上取，满足

$$z\begin{pmatrix}1&0\\\bar x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(\varpi_{E_w}\overline{\varpi}_{E_w})^{-\lambda_1}&0\\0&(\varpi_{E_w}\overline{\varpi}_{E_w})^{-\lambda_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\in{}^{\mathrm t}\bar k\,K_2k$$

以及

$$J_v(w_1,\Phi_v)=\mathrm{vol}(Z(F_v)\cap K_2)^{-1}$$

$$\times\sum_{\substack{k\in K_1\backslash K(E_w)\\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbf Z}}q_{E_w}^{\lambda_2-\lambda_1}\Psi'_{f'_w}\left(k\begin{pmatrix}\varpi_{E_w}^{\lambda_1}&0\\0&\varpi_{E_w}^{\lambda_2}\end{pmatrix}\right)$$

$$\times\int_{\substack{n\in F_v\\ z\in Z(F_v)\\ z\begin{pmatrix}0&\overline{\varpi}_{E_w}^{-\lambda_1}\varpi_{E_w}^{\lambda_2}\\ \varpi_{E_w}^{-\lambda_1}\overline{\varpi}_{E_w}^{-\lambda_2}&n\varpi_{E_w}^{-\lambda_2}\overline{\varpi}_{E_w}^{-\lambda_2}\end{pmatrix}\in{}^{\mathrm t}\bar kK_2k}}\psi_v(n)\mathrm{d}n\mathrm{d}^{\times}z,$$

其中 $w_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $K_2=\left\{{}^t\bar{x}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}x \,\middle|\, x\in K_1\right\}$ 为 $K(E_v)\cap S(F_v)$ 的一个开紧子集.

证明 我们尚要对第二个式子进行证明：

$$J_v(w_1,\Phi_v)=\int_{Z(F_v)}\int_{F_v}\Phi_v\left(z\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\right)\psi_v\circ\mathrm{tr}(n)\mathrm{d}n\mathrm{d}^\times z$$

$$=\mathrm{vol}(Z(F_v)\cap K_2)^{-1}\mathrm{vol}(K_1)^{-1}$$

$$\times\int_{Z(F_v)}\int_{F_v}\int_{G(E_w)}\Phi_1\left(z\,{}^t\bar{g}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}g^{-1}\right)$$

$$\times f'_w(g)\psi_v\circ\mathrm{tr}(n)\mathrm{d}g\mathrm{d}n\mathrm{d}^\times z.$$

同前面一样，设

$$g=k_1k\begin{bmatrix}\varpi_{E_w}^{\lambda_1}&0\\0&\varpi_{E_w}^{\lambda_2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},$$

其中 $k_1\in K_1$, $k\in K_1\backslash K(E_w)$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{Z}$, $x\in E_w$，则对 k_1 积分后得到

$$J_v(w_1,\Phi_v)=\mathrm{vol}(Z(F_v)\cap K_2)^{-1}\sum_{\substack{k\in K_1\backslash K(E_w)\\ \lambda_1,\lambda_2\in Z}}q_{E_w}^{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$\times\int_{Z(F_v)}\int_{F_v}\int_{E_w}\Phi_1\left[z\,{}^t\bar{k}^{-1}\begin{bmatrix}\overline{\varpi}_{E_w}^{-\lambda_1}&0\\0&\overline{\varpi}_{E_w}^{-\lambda_2}\end{bmatrix}\right.$$

$$\times\begin{pmatrix}0&1\\1&2n-x-\bar{x}\end{pmatrix}\left.\begin{bmatrix}\varpi_{E_w}^{\lambda_1}&0\\0&\varpi_{E_w}^{-\lambda_2}\end{bmatrix}k^{-1}\right]$$

$$\times f'_w\left[k\begin{bmatrix}\varpi_{E_w}^{\lambda_1}&0\\0&\varpi_{E_u}^{\lambda_2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\right]\psi_v(2n)\mathrm{d}x\mathrm{d}n\mathrm{d}^\times z.$$

作变量替换 $y=2n-x-\bar{x}$，则有

$$J_v(w_1,\Phi_v)=\mathrm{vol}(Z(E_w)\cap K_2)^{-1}\sum_{\substack{k\in K_1\backslash K(E_w)\\ \lambda_1,\lambda_2\in Z}}q_{E_u}^{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$\times \Psi'_{f'_w}\left(k\begin{pmatrix}\varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2}\end{pmatrix}\right)$$

$$\times \int_{Z(F_v)}\int_{F_v}\Phi_1\left(z\,{}^t\bar{k}^{-1}\begin{pmatrix}\overline{\varpi}_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \overline{\varpi}_{E_w}^{-\lambda_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varpi_{E_w}^{-\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{-\lambda_2}\end{pmatrix}k^{-1}\right)$$

$$\times \psi_v(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}^{\times}z.$$

由于 Φ_1 为 K_2 的特征函数，我们由上式推出定理中的第二式. 证毕.

与 $I_v\left(\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, f_{1v}\right)$ 的指数和展开定理类似，定理第一式右端的积分为一个不完全指数和.

§6 基本引理的证明(v 分裂)

我们在 §2 最后曾指出当 v 在 E 中分裂时，$E\otimes_F F_v = E_{v_1}\oplus E_{v_2}\cong F_v\oplus F_v$，且

$$J_v(w_1,\Phi_v) = \int_{Z(F_v)}\int_{F_v}\Phi_v\left(zw_1\begin{pmatrix}1 & x \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_v(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}^{\times}z$$

及

$$J_v\left(\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\Phi_v\right) = \int_{Z(F_v)}\int_{F_v}\int_{F_v}\Phi_v\left(z\begin{pmatrix}1 & 0 \\ y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\times \psi_v(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}^{\times}z,\ a\in F_v^{\times}.$$

与 $I_v(w_1,f_{1v})$ 及 $I_v\left(\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, f_{1v}\right)$ 相比较，可以看出我们只要设 $\Phi_v = f_{1v}$ 即可得到轨道积分之间的等式：

$$I_v(w_1,\Phi_v) = I_v(w_1,f_{1v}),\quad w_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

及

$$J_v\left(\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\Phi_v\right) = I_v\left(\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, f_{1v}\right).$$

此时$S(F_v)=\{(s,{}^ts)\mid s\in G(F_v)\}$而 $H(s,{}^ts)(F_v)=\{(h,{}^ts^{-1}{}^th^{-1}{}^ts)\mid h\in G(F_v)\}$. 这里的函数 Φ_v 与 $G(E_{v_1})\times G(E_{v_2})\simeq G(F_v)\times G(F_v)$ 上的函数 $f'_{v_1}\otimes f'_{v_2}$之间的关系为$\left(取\ s=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=w_1\right)$:

$$\int_{Z(F_v)}\Phi_v\left(z\,{}^tg_2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}g_1\right)\mathrm{d}^\times z$$

$$=\int\limits_{\substack{z_1,z_2\in Z(F_v)\\h\in Z(F_v)\backslash G(F_v)}}f'_{v_1}(z_1hg_1)f'_{v_2}(z_2\,{}^ts^{-1}\,{}^th^{-1}\,{}^tsg_2)\mathrm{d}^\times z_1\mathrm{d}^\times z_2\mathrm{d}h$$

$$=\int\limits_{\substack{z_2\in Z(F_v)\\h\in G(F_v)}}f'_{v_1}(hg_1)f'_{v_2}(z_2w_1\,{}^th^{-1}\,w_1g_2)\mathrm{d}^\times z_2\mathrm{d}h.$$

作变量替换 $k=hg_1$,并记 $g={}^tg_2w_1g_1$,则有

$$\int_{Z(F_v)}\Phi_v(zg)\mathrm{d}^\times z=\int\limits_{\substack{z_2\in Z(F_v)\\k\in G(F_v)}}f'_{v_1}(k)f'_{v_2}(z_2w_1\,{}^tk^{-1}\,{}^tg)\mathrm{d}^\times z_2\mathrm{d}k.$$

如果我们设 v 为非 Archimedes 赋值且 $f'_{v_1},f'_{v_2}\in\mathscr{H}(G(F_v),K(F_v))$均为左右 $K(F_v)$不变的球面函数,则上式可简化为

$$\int_{Z(F_v)}\Phi_v(zg)\mathrm{d}^\times z=\int\limits_{\substack{z\in Z(F_v)\\h\in G(F_v)}}f'_{v_1}(h)f'_{v_2}(zgh^{-1})\mathrm{d}^\times z\mathrm{d}h$$

$$=\int_{Z(F_v)}f'_{v_1}*f'_{v_2}(zg)\mathrm{d}^\times z.$$

由此可知 Φ_v 作为 $G(F_v)$上的函数亦左右 $K(F_v)$不变,属于 $\mathscr{H}(G(F_v),K(F_v))$. 我们为得到轨道积分等式而取的 $\Phi_v=f_{1v}=f_v$,则说明了对于球带函数 f_v 与 f'_{v_1},f'_{v_2},相对应的轨道积分当

$$\int_{Z(F_v)}f_v(zg)\mathrm{d}^\times z=\int_{Z(F_v)}f'_{v_1}*f'_{v_2}(zg)\mathrm{d}^\times z$$

时相等. 这就是当非 Archimedes 赋值 v 在 E 中分裂时的基本引理及其证明,此时的 Hecke 代数的基变换映射 b: $f'_{v_1}\otimes f'_{v_2}\to f_v$ 就是卷积映射

$$f_v = f'_{v_1} * f'_{v_2}.$$

若反之函数 f_v 给定，由于 v 为非 Archimedes 赋值，我们恒可以找到 $f'_{v_1}, f'_{v_2} \in \mathscr{H}(G(F_v), K(F_v))$ 使得其卷积等于 f_v，例如取 f'_{v_1} 为 $K(F_v)$ 的特征函数，而取 $f'_{v_2} = f_v$.

附带说一下 Archimedes v 在 E 中分裂的情况. 此时轨道积分没有基本引理的要求，且给定任意函数 f'_{v_1} 与 f'_{v_2} 显然可得到 f_v. 但给定了 f_v 则不一定能找到 f'_{v_1} 与 f'_{v_2} 使得

$$\int_{Z(F_v)} f_v(zg)\mathrm{d}^\times z = \int_{Z(F_v)}\int_{G(F_v)} f'_{v_1}(h) f'_{v_2}(zw_1{}^t h^{-1}{}^t g)\mathrm{d}h\mathrm{d}^\times z$$

或

$$\widetilde{f}_v = \widetilde{f}'_{v_1} * \widetilde{f}'_2,$$

其中 $f'_2(g) = f'_{v_2}(w_1{}^t g)$ 及 $\widetilde{f}(g) = \int_{Z(F_v)} f(zg)\mathrm{d}^\times z$. 这时有以下结果（见参考文献[38]与[39]）：任意高次可微的 $\mathrm{GL}(2, \boldsymbol{R})$ 或 $\mathrm{GL}(2, \boldsymbol{C})$ 上的函数 f_v 都可以表示成有限和 $\sum_j f_j * f'_j$，其中 f_j 与 f'_j 为高次可微函数. 由这个结果我们可知 I_v 和 J_v 的一个有限和相等，这个结果已经足够我们以后的应用了.

§7 基本引理的证明（v 不分裂）

在本节之中我们设 v 为 F 的一个非 Archimedes 赋值，其在 E 中不分裂非分歧，并满足 $|2|_v = 1$ 且 ψ_v 的阶数为零，则对于 $z \in \varpi_v^n R_v^\times$，$\eta_v(z) = (-1)^n$. 又设 $f_v \in \mathscr{H}(G(F_v), K(F_v))$ 为左右 $K(F_v)$ 不变球面函数，$f'_v \in \mathscr{H}(G(E_w), K(E_w))$ 为左右 $K(E_w)$ 不变球面函数，则 $f_{1v} = f_v$. 我们注意到由于 ψ_v 的阶数为零且 f_v 左右 $K(F_v)$ 不变，当 $\lambda_1 > \lambda_2$ 时

$$\Psi_{f_v}\begin{bmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{bmatrix} = \int_{F_v} f_v\left(\begin{pmatrix} 1 & x\,\varpi_v^{\lambda_1-\lambda_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{pmatrix}\right)\psi_v(x)\mathrm{d}x = 0.$$

同样由于 v 在 E 中非分歧，$\psi_v \circ \mathrm{tr}$ 作为 E_w 的一个特征其阶数亦为零. 故当 $\lambda_1 > \lambda_2$ 时，

$$\Psi'_{f'_w}\begin{pmatrix} \varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2} \end{pmatrix} = 0.$$

我们依次有以下的计算结果：

$$I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_v\right)$$

$$= \sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbf{Z} \\ \lambda_1 \leqslant \lambda_2}} \Psi_{f_v}\begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{pmatrix} \int\limits_{\substack{x,y \in F_v \\ z \in F_v^{\times} \\ z\begin{pmatrix} a\varpi_v^{-\lambda_1} & ay\varpi_v^{-\lambda_1} \\ ax\varpi_v^{-\lambda_1} & axy\varpi_v^{-\lambda_1} + \varpi_v^{-\lambda_2} \end{pmatrix} \in K(F_v)}} \eta_v(z)$$

$$\times \psi_v(x + y\,\varpi_v^{\lambda_2 - \lambda_1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}^{\times}z.$$

从积分的最后一条件可知

$$az^2\,\varpi_v^{-\lambda_1-\lambda_2} \in R_v^{\times},$$

$$2 \mid (\lambda_1 + \lambda_2 - A), \quad 这里\ A = \mathrm{ord}_v(a),$$

$$z \in \varpi_v^{(\lambda_1+\lambda_2-A)/2} R_v^{\times},$$

$$az\,\varpi_v^{-\lambda_1} \in R_v,$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 \leqslant A.$$

如果 $\lambda_1 - \lambda_2 = A$，则 $x, y \in R_v$ 且积分等于

$$\eta(\varpi_v^{(\lambda_1+\lambda_2-A)/2}) = (-1)^{\lambda_2}.$$

如果 $\lambda_1 - \lambda_2 < A$，$\lambda_1 - \lambda_2 \equiv A \pmod 2$，则

$$x, y \in \varpi_v^{(\lambda_1-\lambda_2-A)/2} R_v^{\times}, \quad xy \in -\frac{\varpi_v^{\lambda_1-\lambda_2}}{a} + \varpi_v^{(\lambda_1-\lambda_2-A)/2} R_v.$$

因此相应的积分等于

$$(-1)^{(\lambda_1+\lambda_2-A)/2} \int\limits_{\substack{x,y \in \varpi_v^{(\lambda_1-\lambda_2-A)/2} R_v^{\times} \\ xy \in -\frac{\varpi_v^{\lambda_1-\lambda_2}}{a} + \varpi_v^{(\lambda_1-\lambda_2-A)/2} R_v}} \psi_v(x + y\,\varpi_v^{\lambda_2-\lambda_1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= (-1)^{(\lambda_1+\lambda_2-A)/2}\int_{\varpi_v^{(\lambda_1-\lambda_2-A)/2}R_v^\times}\psi_v\left(x-\frac{1}{ax}\right)\mathrm{d}x.$$

我们这时考虑两种情况：(1) $\lambda_1=\lambda_2, A>0$，及(2) $\lambda_1<\lambda_2, \lambda_1-\lambda_2=A-2$. 可以证明在其他情况上述积分为零.

引理 设特征 ψ_v 的阶数为零，$b\in\varpi_v^B R_v^\times$，且 $B<0$，则积分

$$\int_{\varpi_v^X R_v^\times}\psi_v\left(x+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x$$

除下列两种情况外等于零：

(i) B 为偶数，$X=B/2$；

(ii) $B=-1, X=0$ 或 -1.

证明 如非情况(i)，则 x 与 b/x 具有不同的赋值. 如果此时又非情况(ii)，则我们可选取适当的 $M>0$，并设 $x=y(1+u)$，其中 $y\in\varpi_v^X(R_v^\times/(1+\varpi_v^M R_v))$，$u\in\varpi_v^M R_v$，使得

$$\begin{aligned}\psi_v\left(x+\frac{b}{x}\right)&=\psi_v\left(y(1+u)+\frac{b}{y(1+u)}\right)\\&=\psi_v\left(y(1+u)+\frac{b}{y}(1-u+u^2-\cdots)\right)\\&=\psi_v\left(y(1+u)+\frac{b}{y}(1-u)\right)\\&=\psi_v\left(y+\frac{b}{y}\right)\psi_v\left(\left(y-\frac{b}{y}\right)u\right).\end{aligned}$$

如果 M 选取的合适，对 u 的积分为零. 证毕.

回到前面的两种情况(i)与(ii)，我们得到

$$I_v\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix},f_v\right)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}}(-1)^{\lambda-A/2}\Psi_{f_v}\begin{pmatrix}\varpi_v^\lambda&0\\0&\varpi_v^\lambda\end{pmatrix}\\\qquad\displaystyle\times\int_{\varpi_v^{-A/2}R_v^\times}\psi_v\left(x-\frac{1}{ax}\right)\mathrm{d}x,\\\qquad\text{如果 } A>0, 2\mid A;\\\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}}(-1)^\lambda\left(\Psi_{f_v}\begin{pmatrix}\varpi_v^{\lambda+A}&0\\0&\varpi_v^\lambda\end{pmatrix}\right.\\\qquad\displaystyle\left.-\Psi_{f_v}\begin{pmatrix}\varpi_v^{\lambda+A-1}&0\\0&\varpi_v^{\lambda+1}\end{pmatrix}\right),\\\qquad\text{如果 } A\leqslant 0;\\0,\quad\text{如果 } A>0, 2\nmid A.\end{cases}$$

这里当 $A\leqslant 0$，即情况(ii)时我们对积分 $\int\psi_v\left(x-\frac{1}{ax}\right)\mathrm{d}x$ 直接进行了计算.

另一个轨道积分的计算较容易

$$I_v(w_1,f_v)=\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}}(-1)^{\lambda}\Psi_{f_v}\begin{pmatrix}\varpi_v^{\lambda} & 0\\ 0 & \varpi_v^{\lambda}\end{pmatrix},\quad w_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

对于 J_v，我们有

$$J_v\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\Phi_v\right)=\sum_{\substack{\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{Z},\\ \lambda_1\leqslant\lambda_2}}\Psi'_{f_w}\begin{pmatrix}\varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0\\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2}\end{pmatrix}$$

$$\times\int\psi_v\circ\mathrm{tr}(x\,\varpi_{E_w}^{\lambda_2-\lambda_1})\mathrm{d}x\mathrm{d}^{\times}z.$$

其中最后一个积分在 $x\in E_w,z\in Z(F_v)$ 上取，满足

$$z\begin{pmatrix}a(\varpi_{E_w}\overline{\varpi_{E_w}})^{-\lambda_1} & ax(\varpi_{E_w}\overline{\varpi_{E_w}})^{-\lambda_1}\\ a\,\overline{x}(\varpi_{E_w}\overline{\varpi_{E_w}})^{-\lambda_1} & ax\,\overline{x}(\varpi_{E_w}\overline{\varpi_{E_w}})^{-\lambda_1}+(\varpi_{E_w}\overline{\varpi_{E_w}})^{-\lambda_2}\end{pmatrix}\in K(E_w)\cap S(F_v).$$

从积分的矩阵条件可知 $2|A,z\in\varpi_v^{\lambda_1+\lambda_2-A/2}R_v^{\times},\lambda_1-\lambda_2\leqslant A/2$. 如果 $A\leqslant 0,\lambda_1-\lambda_2=A/2$，则 $x\in R_{E_w}$ 且积分等于 1. 如果 $\lambda_1-\lambda_2<A/2$，则

$$x\in\varpi_{E_w}^{\lambda_1-\lambda_2-A/2}R_{E_w}^{\times},\quad x\,\overline{x}\in-\frac{1}{a}(\varpi_{E_w}\overline{\varpi_{E_w}})^{\lambda_1-\lambda_2}+\varpi_v^{\lambda_1-\lambda_2-A/2}R_v.$$

因此该积分等于

$$\int\limits_{\substack{x\in\varpi_{E_w}^{\lambda_1-\lambda_2-A/2}R_{E_w}^{\times}\\ x\overline{x}\in-\frac{1}{a}(\varpi_{E_w}\overline{\varpi_{E_w}})^{\lambda_1-\lambda_2}+\varpi_v^{\lambda_1-\lambda_2-A/2}R_v}}\psi_v\circ\mathrm{tr}(x\,\varpi_{E_w}^{\lambda_2-\lambda_1})\mathrm{d}x$$

$$=q_v^{2(\lambda_2-\lambda_1)}\int\limits_{\substack{y\in\varpi_{E_w}^{-A/2}R_{E_w}^{\times}\\ y\overline{y}\in-\frac{1}{a}+\varpi_v^{\lambda_2-\lambda_1-A/2}R_v}}\psi_v\circ\mathrm{tr}(y)\mathrm{d}y.$$

如此时 $A\leqslant 0$，则 $\psi_v\circ\mathrm{tr}(y)=1$，上式中积分等于（取 $y=x\,\varpi_{E_w}^{-A/2}$）

$$q_v^{2(\lambda_2-\lambda_1)+A}\int\limits_{\substack{x\in R_{E_w}^{\times}\\ x\overline{x}\in-\frac{1}{a}(\varpi_{E_w}\overline{\varpi_{E_w}})^{A/2}(1+\varpi_v^{\lambda_2-\lambda_1+A/2}R_v)}}\mathrm{d}x=q_v^{\lambda_2-\lambda_1+A/2}(1+q_v^{-1}).$$

因此

$$J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\lambda_1 \leqslant \lambda_2} q_v^{2(\lambda_2-\lambda_1)} \Psi'_{f_w}\begin{pmatrix} \varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2} \end{pmatrix} \\ \quad \times \displaystyle\int_{\substack{y \in \varpi_{F_w}^{A/2} R_{E_w}^{\times} \\ y\bar{y} \in -\frac{1}{u} + \varpi_v^{\lambda_2-\lambda_1-A/2} R_v}} \psi_v \circ \mathrm{tr}(y) \mathrm{d}y, \\ \quad \text{如果 } A > 0, 2 \mid A; \\ \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathbf{Z}} \Psi'_{f_w}\begin{pmatrix} \varpi_{E_w}^{\lambda+A/2} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda} \end{pmatrix} + \sum_{\lambda_1-\lambda_2 < A/2} (1+q_v^{-1}) \\ \quad \times q_v^{\lambda_2-\lambda_1+A/2} \Psi'_{f_w}\begin{pmatrix} \varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2} \end{pmatrix}, \\ \quad \text{如果 } A \leqslant 0, 2 \mid A; \\ 0, \quad \text{如果 } 2 \nmid A. \end{cases}$$

另一个轨道积分为 $\left(w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$J_v(w_1, \Phi_v) = \sum_{\lambda_1 \leqslant \lambda_2} q_v^{2(\lambda_2-\lambda_1)} \Psi'_{f_w}\begin{pmatrix} \varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

$$\times \int_{\substack{n \in F_v, z \in Z(F_v) \\ z\begin{pmatrix} 0 & \bar{\varpi}_{E_w}^{-\lambda_1} \varpi_{E_w}^{-\lambda_2} \\ \varpi_{E_w}^{-\lambda_1} \bar{\varpi}_{E_w}^{-\lambda_2} & n(\varpi_{E_w}\bar{\varpi}_{E_w})^{\lambda_2} \end{pmatrix} \in K(E_w) \cap S(F_v)}} \psi_v(n) \mathrm{d}n \mathrm{d}^{\times} z.$$

这里的积分条件可简化为 $z \in \varpi_v^{\lambda+\lambda_2} R_v^{\times}, n \in \varpi_v^{\lambda_2-\lambda_1} R_v$. 因此

$$J_v(w_1, \Phi_v) = \sum_{\lambda_1 \leqslant \lambda_2} q_v^{2(\lambda_2-\lambda_1)} \Psi'_{f_w}\begin{pmatrix} \varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2} \end{pmatrix} \int_{\substack{n \in \varpi_v^{\lambda_2-\lambda_1} R_v \\ z \in \varpi_v^{\lambda_1+\lambda_2} R_v^{\times}}} \psi_v(n) \mathrm{d}n \mathrm{d}^{\times} z$$

$$= \sum_{\lambda_1 \leqslant \lambda_2} q_v^{\lambda_2-\lambda_1} \Psi'_{f_w} \begin{pmatrix} \varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 时，

$$\Psi_{f_v} \begin{pmatrix} \varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \int_{R_v} f_v \left(\begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \psi_v(x) \mathrm{d}x$$

$$+ \int_{x \notin R_v} f_v \left(\begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \psi_v(x) \mathrm{d}x. \tag{1}$$

由于 f_v 左右 $K(F_v)$ 不变，当 $x \in R_v$ 时，

$$f_v \left(\begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = f_v \begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

故(1)式右边第一个积分等于 $f_v \begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{pmatrix}$，以下我们记作 $f_v(\lambda_1, \lambda_2)$. 而根据同样道理，当 $x \notin R_v$ 时，

$$f_v \left(\begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = f_v \left(\begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= f_v \begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1+X} & 0 \\ \varpi_v^{\lambda_2} & \varpi_v^{\lambda_2-X} \end{pmatrix},$$

其中 $x \in \varpi_v^X R_v^\times$, $X<0$. 故(1)式右边第二个积分等于

$$\sum_{X<0} f_v \begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1+X} & 0 \\ \varpi_v^{\lambda_2} & \varpi_v^{\lambda_2-X} \end{pmatrix} \int_{\varpi_v^X R_v^\times} \psi_v(x) \mathrm{d}x.$$

因为 ψ_v 的阶数为零，对 $\psi_v(x)$ 的积分当 $X=-1$ 时等于 -1，而当 $X<-1$ 时为零，故上式等于

$$-f_v \begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_1-1} & 0 \\ \varpi_v^{\lambda_2} & \varpi_v^{\lambda_2+1} \end{pmatrix} = -f_v \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_v^{\lambda_2-\lambda_1+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_v^{\lambda_2-1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2+1} \end{pmatrix} \right)$$

$$= -f_v\begin{pmatrix}\varpi_v^{\lambda_2-1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2+1}\end{pmatrix} = -f_v(\lambda_1-1,\lambda_2+1).$$

因此当 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 时，

$$\Psi_{f_v}\begin{pmatrix}\varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2}\end{pmatrix} = f_v(\lambda_1,\lambda_2) - f_v(\lambda_1-1,\lambda_2+1)$$

(关于此式在 GL(3),GL(4)上的推广见参考文献[68]). 在 § 3 我们曾得到 Satake 变换的一个公式

$$Sf_v(\lambda_1,\lambda_2) - Sf_v(\lambda_1-1,\lambda_2+1)$$
$$= q_v^{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}}(f_v(\lambda_1,\lambda_2) - f_v(\lambda_1-1,\lambda_2+1)), \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_2.$$

因此我们得到 Ψ_{f_v} 与 Satake 变换之间的关系

$$\Psi_{f_v}\begin{pmatrix}\varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2}\end{pmatrix}$$
$$= q_v^{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}(Sf_v(\lambda_1,\lambda_2) - Sf_v(\lambda_1-1,\lambda_2+1)), \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_2.$$

(关于此式在 GL(n)上的推广见参考文献[65]). 同样我们有

$$\Psi_{f'_w}\begin{pmatrix}\varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2}\end{pmatrix}$$
$$= q_v^{\lambda_1-\lambda_2}(Sf'_w(\lambda_1,\lambda_2) - Sf'_w(\lambda_1-1,\lambda_2+1)), \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_2,$$

其中我们用到了 $q_{E_w} = q_v^2$.

为了证明基本引理，我们设 $f_v = b(f'_w)$. 则由 § 3，这个基变换映射由

$$Sf_v(\lambda_1,\lambda_2) = \begin{cases} Sf'_w\left(\dfrac{\lambda_1}{2},\dfrac{\lambda_2}{2}\right), & \text{如果 } \lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 0 \pmod 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

给出. 因此对于 $f_v = b(f'_w)$来说，当 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 时，

$$\Psi_{f_v}\begin{pmatrix}\varpi_v^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2}\end{pmatrix} = 0, \quad \text{如果 } \lambda_1 \not\equiv \lambda_2 \pmod 2;$$

$$\Psi_{f_v}\begin{pmatrix}\varpi_v^{\lambda_1} & 0\\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2}\end{pmatrix}=q_v^{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}Sf_v(\lambda_1,\lambda_2)$$

$$=q_v^{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}Sf'_w\left(\frac{\lambda_1}{2},\frac{\lambda_2}{2}\right),\quad \text{如果 } \lambda_1\equiv\lambda_2\equiv 0 \pmod 2,$$

$$\Psi_{f_v}\begin{pmatrix}\varpi_v^{\lambda_1} & 0\\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2}\end{pmatrix}=-q_v^{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}Sf_v(\lambda_1-1,\lambda_2+1)$$

$$=-q_v^{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}Sf'_w\left(\frac{\lambda_1-1}{2},\frac{\lambda_2+1}{2}\right),$$

$$\text{如果 } \lambda_1\equiv\lambda_2\equiv 1 \pmod 2.$$

由此 $\left(w_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$

$$I_v(w_1,f_v)=\sum_{\lambda\in Z}(Sf'_w(\lambda,\lambda)+Sf'_w(\lambda,\lambda+1)).$$

另一方面

$$J_v(w_1,\Phi_v)=\sum_{\lambda_1\leqslant\lambda_2}(Sf'_w(\lambda_1,\lambda_2)-Sf'_w(\lambda_1-1,\lambda_2+1))$$

$$=\sum_{\lambda\in Z}(Sf'_w(\lambda,\lambda)+Sf'_w(\lambda,\lambda+1)),$$

这就证明了

$$I_v(w_1,f_v)=J_v(w_1,\Phi_v),\quad w_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

对 $f_v=b(f'_w)$ 成立.

为了证明 $I_v\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},f_v\right)=J_v\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\Phi_v\right)$，我们先考虑 $A\leqslant 0$ 的情况. 由于 $\Psi_{f_v}\begin{pmatrix}\varpi_v^{\lambda_1} & 0\\ 0 & \varpi_v^{\lambda_2}\end{pmatrix}=0,\lambda_1\not\equiv\lambda_2 \pmod 2$，可知当 $2\nmid A$，$A\leqslant 0$ 时，

$$I_v\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},f_v\right)=0,$$

故其与 $J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right)$ 相等. 当 $2|A$，$A\leqslant 0$ 时，

$$I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_v\right)=\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}}\left(\Psi_{f_v}\begin{bmatrix} \varpi_v^{2\lambda+A} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{2\lambda} \end{bmatrix}-\Psi_{f_v}\begin{bmatrix} \varpi_v^{2\lambda+A-2} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{2\lambda} \end{bmatrix}\right)$$

$$-\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}}\left(\Psi_{f_v}\begin{bmatrix} \varpi_v^{2\lambda+A+1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{2\lambda+1} \end{bmatrix}+\Psi_{f_v}\begin{bmatrix} \varpi_v^{2\lambda+A-1} & 0 \\ 0 & \varpi_v^{2\lambda+1} \end{bmatrix}\right).$$

利用上面的结果有

$$I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_v\right)=q_v^{A/2}\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}}\left(Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2},\lambda\right)+q_v^{-1}Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2}-1,\lambda\right)\right)$$

$$+q_v^{A/2}\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}}\left(Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2},\lambda+1\right)+q_v^{-1}Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2}-1,\lambda+1\right)\right)$$

$$=q_v^{A/2}\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}}\left(Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2},\lambda\right)+(1+q_v^{-1})Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2},\lambda+1\right)\right.$$

$$\left.+q_v^{-1}Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2}-1,\lambda+1\right)\right).$$

另一方面，此时 $2|A$，$A\leqslant 0$，有

$$J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right)=q_v^{A/2}\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}}\left(Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2},\lambda\right)-Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2}-1,\lambda+1\right)\right)$$

$$+q_v^{A/2}(1+q_v^{-1})\sum_{\lambda_1-\lambda_2<A/2}(Sf'_w(\lambda_1,\lambda_2)-Sf'_w(\lambda_1-1,\lambda_2+1)).$$

对第二个和式求和，我们得到

$$J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right)=q_v^{A/2}\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}}\left(Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2},\lambda\right)-Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2}-1,\lambda+1\right)\right)$$

$$+q_v^{A/2}(1+q_v^{-1})\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}}\left(Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2},\lambda+1\right)\right.$$

$$\left.+Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2}-1,\lambda+1\right)\right)$$

$$=q_v^{A/2}\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}}\left(Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2},\lambda\right)+(1+q_v^{-1})Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2},\lambda+1\right)\right.$$

$$\left.+q_v^{-1}Sf'_w\left(\lambda+\frac{A}{2}-1,\lambda+1\right)\right).$$

故当 $2|A, A\leqslant 0$ 时，亦有 $I\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_v\right)=J\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right)$.

最后我们考虑 $A>0, 2|A$ 时的情况. 我们注意到

$$I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_v\right)=(-1)^{A/2}\int_{\varpi_v^{A/2}R_v^\times}\psi_v\left(x-\frac{1}{ax}\right)\mathrm{d}x I_v(w_1, f_v),$$

与此类似，如果我们可将 $J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right)$ 中对 y 的积分改写而得到

$$\begin{aligned} & J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right) \\ & = \sum_{\lambda_1\leqslant\lambda_2} q_v^{\lambda_2-\lambda_1}\Psi'_{f_w}\begin{pmatrix} \varpi_{E_w}^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \varpi_{E_w}^{\lambda_2} \end{pmatrix}\int_{\substack{y\in\varpi_{E_w}^{-A/2}R_{E_w}^\times \\ y\bar{y}\in-\frac{1}{a}+\varpi_v^{-A/2}R_v}}\psi_v\circ\operatorname{tr}(y)\mathrm{d}y \\ & = \int_{\substack{y\in\varpi_{E_w}^{-A/2}R_{E_w}^\times \\ y\bar{y}\in-\frac{1}{a}+\varpi_v^{-A/2}R_v}}\psi_v\circ\operatorname{tr}(y)\mathrm{d}y\ J_v(w_1, \Phi_v), \end{aligned}$$

其中 $w_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\bar{y}$ 表示 y 的 Galois 共轭. 因此 $I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_v\right)=J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right)$ 的证明就归结为下节指数和之间的恒等式.

§8 指数和关系

定理 设 v 为 F 的一个在 E 中不分裂非分歧赋值，满足 $|2|_v=1$. 又设 ψ_v 的阶数为零，则对于任意 $b\in\varpi_v^{2B}R_v^\times, B<0$，有

$$(-1)^B\int_{\varpi_v^B R_v^\times}\psi_v\left(x+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{\substack{y\in\varpi_{E_w}^B R_{E_w}^\times \\ y\bar{y}\in b+\varpi_v^B R_v}}\psi_v\circ\operatorname{tr}_{E_w/F_v}(y)\mathrm{d}y.$$

证明 设 χ 为 $F_v^\times$ 上任意一个积性特征,我们对上式两边分别进行 Mellin 变换. 左边的 Mellin 变换为

$$(-1)^B\int_{\varpi_v^{2B}R_v^\times}\chi^{-1}(b)\mathrm{d}b\int_{\varpi_v^B R_v^\times}\psi_v\left(x+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=q_v^{-B}\int_{\varpi_v^B R_v^\times}\chi^{-1}(y)\psi_v(y)\mathrm{d}y\int_{\varpi_v^B R_v^\times}\eta_v\chi^{-1}(x)\psi_v(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $y=\frac{b}{x}\in\varpi_v^B R_v^\times$. 由于 ψ_v 的阶数为零,

$$\int_{\varpi_v^B R_v^\times}\chi^{-1}(y)\psi_v(y)\mathrm{d}y=\begin{cases}-\chi(\varpi_v), & \text{如果 }\chi\text{ 非分歧(即 }\chi\text{ 在 }R_v^\times\text{ 上平凡)且 }B=-1;\\ 0, & \text{如果 }\chi\text{ 非分歧但 }B<-1;\\ \varepsilon(\chi,\psi_v;\mathrm{d}x), & \text{如果 }\chi\text{ 分歧(即 }\chi\text{ 在 }R_v^\times\text{ 上不平凡),其前导子为 }-B\text{(即 }\chi\text{ 在 }1+\varpi_v^{-B}R_v\text{ 上平凡但在 }1+\varpi_v^{-B-1}R_v\text{ 上非平凡)};\\ 0, & \text{如果 }\chi\text{ 分歧但其前导子不等于 }-B.\end{cases}$$

这里的 $\varepsilon(\chi,\psi_v;\mathrm{d}x)$ 为 p 进域上的 Gauss 和,亦称局部 ϵ 因子,其定义与基本性质可见参考文献[69]: 设 χ 为 F_v 的一个积性特征,φ 为 F_v 的一个加性特征. 记 $n(\varphi)$ 为 ψ 的阶,对分歧的 χ 记 $a(\chi)$ 为 χ 的前导子,则

$$\varepsilon(\chi,\varphi;\mathrm{d}x)=\begin{cases}\int_{\varpi_v^{a(\chi)-n(\varphi)}R_v^\times}\chi^{-1}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, & \text{如 }\chi\text{ 分歧},\\ \chi(\varpi_v^{n(\varphi)})\,|\varpi_v|_v^{-n(\varphi)}, & \text{如 }\chi\text{ 非分歧}.\end{cases}$$

与此类似

$$\int_{\varpi_v^B R_v^\times}\eta_v\chi^{-1}(x)\psi_v(x)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\chi(\varpi_v), & \text{如果 }\chi\text{ 非分歧且 }B=-1;\\ \varepsilon(\chi\eta_v,\psi_v), & \text{如果 }\chi\text{ 分歧且其前导子为 }-B;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故定理左边的 Mellin 变换等于

$$\begin{cases} -q_v\chi(\varpi_v^2), & \text{如 } \chi \text{ 非分歧且 } B=-1; \\ q_v^{-B}\varepsilon(\chi,\psi_v)\varepsilon(\chi\eta_v,\psi_v), & \text{如 } \chi \text{ 分歧且其前导子为 } -B; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

对定理右边作 Mellin 变换得

$$\int_{\varpi_v^{2B}R_v^\times}\chi^{-1}(b)\mathrm{d}b \int_{\substack{y\in\varpi_{E_w}^B R_{E_w}^\times \\ y\bar{y}\in b+\varpi_v^B R_v}} \psi_v\circ \mathrm{tr}(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\varpi_{E_w}^B R_{E_w}^\times}\psi_v\circ\mathrm{tr}(y)\mathrm{d}y\int_{y\bar{y}+\varpi_v^B R_v}\chi^{-1}(b)\mathrm{d}b.$$

如果 χ 为非分歧，则对 b 的积分等于 $q_v^{\ B}\chi^{-1}(\varpi_v^{2B})$. 由于 $\psi\circ\mathrm{tr}$ 的阶数仍为零，上式当 $B=-1$ 时等于$-q_v\chi(\varpi_v^2)$，而当 $B<-1$ 时等于零. 设 χ 为分歧，记 χ 的前导子为 $a(\chi)>0$. 如果 $a(\chi)\geqslant-2B-1$，则我们可将 b 写成 $b_0(1+u)N_{E_w/F_v}(y)$，其中 $u\in\varpi_v^{[(a(\chi)-1)/2]}R_v$，$b_0\in R_v^\times/(1+\varpi_v^{[(a(\chi)+1)/2]}R_v)$. 则 $[(a(\chi)+1)/2]\geqslant-B$，$u^2\in\varpi_v^{a(\chi)}R_v$，且 $\chi^{-1}(1+u)$成为 $u\in\varpi_v^{[(a(\chi)+1)/2]}R_v$ 的一个非平凡加性特征. 因此对 u 的积分等于零，对 b 的积分亦为零. 如果$-B<a(\chi)<-2B-1$，我们可将 b 写成$(1+u)N_{E_w/F_v}(y)$，$u\in\varpi_v^{-B}R_v$，则 $\chi^{-1}(1+u)$成为 $u\in\varpi_v^{-B}R_v$ 的一个非平凡加性特征，故对 b 的积分亦为零. 由此推知$a(\chi)\leqslant-B$. 此时 $\chi^{-1}(b)=\chi^{-1}(N_{E_w/F_v}(y))$，故上面的积分式等于

$$q_v^{-B}\int_{\varpi_{E_w}^B R_{E_w}^\times}\chi^{-1}\circ N_{E_w/F_v}(y)\psi_v\circ\mathrm{tr}(y)\mathrm{d}y.$$

由于 $\chi^{-1}\circ N_{E_w/F_v}$亦为分歧且其前导子等于 $a(\chi)$，我们可知此积分当 $a(\chi)<-B$ 时亦为零，而当 $a(\chi)=-B$ 时等于 $q_v^{-B}\varepsilon(\chi\circ N_{E_w/F_v},\psi_v\circ\mathrm{tr};\mathrm{d}x)$. 故定理右边积分的 Mellin 变换等于

$$\begin{cases} -q_v\chi(\varpi_v^2), & \text{如果 } \chi \text{ 非分歧且 } B=-1; \\ q_v^{-B}\varepsilon(\chi\circ N_{E_w/F_v},\psi_v\circ\mathrm{tr};\mathrm{d}x), & \text{如果 } \chi \text{ 分歧且 } a(\chi)=-B; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

我们此时要利用一个局部 ϵ 因子的恒等式：

$$\epsilon(\chi,\psi_v)\epsilon(\chi\eta_v,\psi_v)=\epsilon(\chi\circ N_{E_w/F_v},\psi_v\circ \mathrm{tr};\mathrm{d}x).$$

此式为 Davenport-Hasse 关于 Gauss 和的一个恒等式(见参考文献[71])在 p 进域上的形式，见参考文献[72]. 这个恒等式又体现了 GL(1)上的群表示在二次扩域上的基变换，见参考文献[28].

根据这个恒等式，定理中左右两式的 Mellin 变换对于任意积性特征 χ 都相等. 应用 Fourier 反演公式，定理中的两个指数和相等. 证毕.

这个定理对 F 的其他赋值 v 的一般形式的证明可见参考文献[60]. 同一个等式的数论形式及其在 GL(3)上的推广见参考文献[73]. 定理中恒等式的实质是经典 Kloosterman 和与二次扩域中的一个指数和恒等，故后者可以看成 Kloosterman 和在二次扩域中的提升(见 § 12 与 § 13).

以上定理使我们完成了对相对迹公式基本引理的证明. 在 GL(2)的情况下这个基本引理亦可以通过对轨道积分直接计算而得到，如见参考文献[60]. 以上的证明思路可望推广到一般 GL(n)的情形上去，见文献[65].

§ 9　I_v 的 Shalika 芽展开

轨道积分的 Shalika 芽的概念出现在迹公式理论中. 其在 GL(n)的相对迹公式上的证明见参考文献[74]与[75]. 对于 GL(2)上的相对迹公式，其 Shalika 芽可简单介绍如下.

设 v 为 F 的一个非 Archimedes 赋值. 考虑两个矩阵 $e=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 与 $w_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，定义 $A(F_v)=\left\{\begin{pmatrix}*&0\\0&*\end{pmatrix}\right\}$的以下子集

$$A_e=A(F_v),\quad A_{w_1}=Z(F_v),\quad A_e^{w_1}=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&-1/a\end{pmatrix}\,\middle|\,a\in F_v^\times\right\}.$$

定义无 $Z(F_v)$ 上积分的轨道积分

$$\tilde{I}_v(w_1 a, f_v) = \int_{F_v} f_v\left(w_1 a\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_v(x)\mathrm{d}x, \quad a \in A_{w_1},$$

$$\tilde{I}_v(ea, f_v) = \int_{F_v}\int_{F_v} f_v\left({}^t\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} ea \begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \times \psi_v(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad a \in A_e,$$

则 $\tilde{I}_v(w_1 a, f_v)$ $(a \in A_{w_1})$ 为 A_{w_1} 上的一个无穷次可微具有紧支集的函数，记作 $\omega_{w_1}^{f_v}(a)$. GL(2)上的 Shalika 芽为 $A_e^{w_1}$ 上的一个无穷次可微函数 $K_e^{w_1}(b)$ $(b \in A_e^{w_1})$ 使得

$$\tilde{I}_v(ea, f_v) = \sum_{\substack{b \in A_e^{w_1}\\ c \in A_{w_1}\\ bc = a}} K_e^{w_1}(b)\omega_{w_1}^{f_v}(c) + \omega_e^{f_v}(a), \quad a \in A_e,$$

其中 $\omega_e^{f_v}(a)$ 为 A_e 上的一个无穷次可微紧支集函数. 这就是轨道积分的 Shalika 芽展开.

为了说清楚 Shalika 芽展开的意义，我们指出由于 f_v 有紧支集，$\tilde{I}_v(w_1 a, f_v) = \omega_{w_1}^{f_v}(a)$ 确实是 A_{w_1} 上的一个紧支集函数，但是 $\tilde{I}_v(ea, f_v)$ 并不是 A_e 上的紧支集函数. Shalika 芽展开把 $\tilde{I}_v(ea, f_v)$ 分成两部分，一部分 $\omega_e^{f_v}(a)$ 有紧支集，另一部分则给出了 $\tilde{I}_v(ea, f_v)$ 在这个紧支集以外的展开式. 而这个展开式的特点是其由低阶的轨道积分 $\tilde{I}_v(w_1 a, f_v)$ 构成. 在 GL(n) 的情况下，各种高阶低阶的轨道积分或 Weyl 矩阵 ω 组成一个半序集合，对每两个可比较顺序的轨道积分我们都有类似上式的 Shalika 芽展开关系，故 GL(n) 上的相对迹公式的轨道积分 $\tilde{I}_v$ 具有一组 Shalika 芽 $K_{w_1}^{w_2}$. 为了建立相对迹公式，我们需要将这些 Shalika 芽全部计算出来. 由于这项工作现在还做不到，Jacquet 与叶扬波在文献[74]与[75]中证明了 Shalika 芽的存在性及某种意义上的惟一性.

对于 GL(2)上的 Shalika 芽 $K_e^{w_1}(b)$，我们不再单独证明其存在性，而对其进行直接计算. 由于 $\omega_e^{f_v}(a)$ 是 A_e 上的一个紧支集函

数，我们对 $K_e^{w_1}(b)$ 的计算可以只限于 $A_e^{w_1}$ 的一个紧支集以外的部分，即只对 $F^\times$ 的一个紧支集以外的 a 计算 $K_e^{w_1}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}$，这里 $bc=a, b\in A_e^{w_1}, c\in A_{w_1}$. 又设 $a=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, a=bc$. 由于 f_v 在 $G(F_v)$ 上有紧支集，$\tilde{I}_v(ea, f_v)$ 的被积分式非零仅当对某 $0<r<R$ 成立

$$0<r\leqslant |a_1a_2|_v = |c|_v^2 \leqslant R.$$

故 c 属于 $F_v^\times$ 的一紧子集. 又由于

$$^t\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ea \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

可知同一被积分式非零仅当 $|a_1|_v=|bc|_v\leqslant M$. 因此必有 $|b|_v\leqslant N$. 故我们对 $K_e^{w_1}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}$ 的计算可对满足 $|b|_v\leqslant\epsilon$ 的 b 进行，这里 $\epsilon>0$ 充分小.

我们注意到 $K_e^{w_1}(b)$ 并不依赖于函数 f_v 的选取. 而 $\omega_{w_1}^{f_v}(a)=\tilde{I}_v(w_1a, f_v)$ 为已知. 故我们可以通过仅取一个特殊的函数 f_v 对 $\tilde{I}_v(ea, f_v)$ 进行计算来得到 $K_e^{w_1}(b)$.

定理(Jacquet、叶扬波[74]) 设 v 为 F 的一个非 Archimedes 赋值，则对于充分小的 $|b|_v$ 存在

$$K_e^{w_1}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix} = \psi_v\left(\frac{2}{b}\right)\gamma\left(\frac{2}{b}, \psi_v\right)|2b|_v^{-1/2},$$

这里 γ 为 Weil 常数，通过下式定义

$$\int_{F_v}\hat{\Phi}(x)\psi_v\left(\frac{ax^2}{2}\right)\mathrm{d}x = |a|_v^{-1/2}\gamma(a,\psi_v)\int_{F_v}\Phi(x)\psi_v\left(-\frac{x^2}{2a}\right)\mathrm{d}x,$$

其中左右两边积分的测度 $\mathrm{d}x$ 均为 F_v 上对应于 ψ_v 的自对偶测度，而

$$\hat{\Phi}(x)=\int_{F_v}\Phi(y)\psi_v(xy)\mathrm{d}y$$

为 Φ 的 Fourier 变换. 如果 ψ_v 的阶数为 r，则这个自对偶测度由 $\mathrm{vol}(R_v)=q_v^{r/2}$ 给出.

定理的证明 设 m 为一充分大正整数，满足 $m\geqslant r$（故 ψ_v 在 $\varpi_v^m R_v$ 上平凡），$-1\notin 1+\varpi_v^m R_v$，及 $\frac{1}{2}\varpi_v^m R_v\subset\varpi_v R_v$（我们在此并不假设 $|2|_v=1$）. 对于 $u\in\varpi_v^m R_v$，我们用 Taylor 级数定义根式 $\sqrt{1+u}$，并设 m 足够大使得对 $u\in\varpi_v^m R_v$ 恒有 $\sqrt{1+u}\in 1+\frac{1}{2}\varpi_v^m R_v$. 记 $K_m=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle|\, a,d\in 1+\varpi_v^m R_v, b,c\in\varpi_v^m R_v\right\}$ 为 $G(F_v)$ 的一个主同余子群，取 f_v 为 w_1K_m 的特征函数，则

$$\tilde{I}_v(w_1,f_v)=\int_{F_v}f_v\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}\psi_v(x)\mathrm{d}x=\mathrm{vol}(\varpi_v^m R_v),$$

而

$$\tilde{I}_v(-w_1,f_v)=\int_{F_v}f_v\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -x\end{pmatrix}\psi_v(x)\mathrm{d}x=0,$$

其中 $w_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. 另一方面

$$\tilde{I}_v\left(\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & -1/b\end{pmatrix},f_v\right)=\int_{F_v}f_v\begin{pmatrix}b & by\\ bx & bxy-1/b\end{pmatrix}\psi_v(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中被积分式仅当 $b\in\varpi_v^m R_v$ 时非零. 作变量替换 $y=z/b$，$z\in 1+\varpi_v^m R_v$ 及 $x=\frac{1+bu}{bz}$，$u\in\varpi_v^m R_v$，则对于 $b\in\varpi_v^m R_v$ 有

$$\tilde{I}_v\left(\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & -1/b\end{pmatrix},f_v\right)=|b|_v^{-1}\int_{\substack{z\in 1+\varpi_v^m R_v\\ u\in\varpi_v^m R_v}}\psi_v\left(\frac{1+bu}{bz}+\frac{z}{b}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}u.$$

由于此时

$$\psi_v\left(\frac{1+bu}{bz}+\frac{z}{b}\right)=\psi_v\left(\frac{1}{b}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right),$$

我们得到

$$\tilde{I}_v\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}, f_v\right)$$

$$= |b|_v^{-1}\mathrm{vol}(\varpi_v^m R_v)\int_{1+\varpi_v^m R_v}\psi_v\left(\frac{1}{b}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\mathrm{d}z.$$

再作变量替换 $z=1+v, v\in\varpi_v^m R_v$，及 $y=\dfrac{v}{\sqrt{1+v}}\in\varpi_v^m R_v$，我们得到 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}v=\mathrm{d}y$ 及

$$\tilde{I}_v\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}, f_v\right)=|b|_v^{-1}\mathrm{vol}(\varpi_v^m R_v)\psi_v\left(\frac{2}{b}\right)\int_{\varpi_v^m R_v}\psi_v\left(\frac{y^2}{b}\right)\mathrm{d}y.$$

为了计算上式右边的积分，我们设 $a=\dfrac{2}{b}$，并定义

$$\Phi(x)=\begin{cases} q_v^{r/2-m}, & \text{如果 } x\in\varpi_v^{r-m}R_v, \\ 0, & \text{如果 } x\notin\varpi_v^{r-m}R_v, \end{cases}$$

则

$$\hat{\Phi}(x)=\int_{F_v}\Phi(y)\psi_v(xy)\mathrm{d}y=q_v^{r/2-m}\int_{\varpi_v^{r-m}R_v}\psi_v(xy)\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases} q_v^{r/2-m}\mathrm{vol}(\varpi_v^{r-m}R_v), & \text{如果 } x\in\varpi_v^m R_v, \\ 0, & \text{如果 } x\notin\varpi_v^m R_v. \end{cases}$$

因这里用的测度是自对偶测度，$\mathrm{vol}(\varpi_v^{r-m}R_v)=q_v^{m-r/2}$，可知 $\hat{\Phi}(x)$ 即为 $\varpi_v^m R_v$ 的特征函数，故

$$\int_{\varpi_v^m R_v}\psi_v\left(\frac{y^2}{b}\right)\mathrm{d}y=\int_{F_v}\hat{\Phi}(y)\psi_v\left(\frac{ay^2}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=|a|_v^{-1/2}\gamma(a,\psi_v)\int_{F_v}\Phi(x)\psi_v\left(-\frac{x^2}{2a}\right)\mathrm{d}x.$$

回到 b，则

$$\int_{\varpi_v^m R_v}\psi_v\left(\frac{y^2}{b}\right)\mathrm{d}y=\left|\frac{2}{b}\right|_v^{-1/2}\gamma\left(\frac{2}{b},\psi_v\right)\int_{\varpi_v^{r-m}R_v}q_v^{\frac{r}{2}-m}\psi_v\left(-\frac{bx^2}{4}\right)\mathrm{d}x.$$

当 $b\in 4\varpi_v^{2m-r}R_v$ 时，$-bx^2/4\in\varpi_v^r R_v$，故此时 $\psi_v\left(-\dfrac{bx^2}{4}\right)=1$. 因此

$$\int_{\varpi_v^m R_v} \psi_v\left(\frac{y^2}{b}\right) \mathrm{d}y = \left|\frac{2}{b}\right|_v^{-1/2} \gamma\left(\frac{2}{b}, \psi_v\right) q_v^{\frac{r}{2}-m} \mathrm{vol}(\varpi_v^{r-m} R_v)$$

$$= \left|\frac{2}{b}\right|_v^{-1/2} \gamma\left(\frac{2}{b}, \psi_v\right).$$

故当 $b \in 4\varpi_v^{2m-r} R_v$ 时，

$$\tilde{I}_v\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}, f_v\right) = |2b|_v^{-1/2} \psi_v\left(\frac{2}{b}\right) \gamma\left(\frac{2}{b}, \psi_v\right) \mathrm{vol}(\varpi_v^m R_v).$$

由于 $\mathrm{vol}(\varpi_v^m R_v) = \tilde{I}_v(w_1, f_v)$ 及 $\tilde{I}_v(-w_1, f_v) = 0$，我们得到

$$K_e^{w_1}\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}, f_v\right) = |2b|_v^{-1/2} \psi_v\left(\frac{2}{b}\right) \gamma\left(\frac{2}{b}, \psi_v\right)$$

当 $|b|_v \leqslant |4|_v q_v^{r-2m}$ 时成立. 证毕.

§10 J_v 的 Shalika 芽展开

在本节中我们设 v 为 F 的一个非 Archimedes 赋值，其在二次扩域 $E=F(\sqrt{\tau})$ 上不分裂. 定义

$$\tilde{J}_v(w_1 a, \Phi_v) = \int_{F_v} \Phi_v\left(w_1 a \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_v(x) \mathrm{d}x, \quad a \in A_{w_1},$$

$$\tilde{J}_v(ea, \Phi_v) = \int_{E_w} \Phi_v\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix} ea \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_v \circ \mathrm{tr}(x) \mathrm{d}x, \quad a \in A_e$$

为无 $Z(F_v)$ 上积分的轨道积分，则

$$\tilde{J}_v(w_1 a, \Phi_v) = \omega_{w_1}^{\Phi_v}(a), \quad a \in A_{w_1}$$

为 A_{w_1} 上的一个无穷次可微且有紧支集的函数. $\tilde{J}_v(ea, \Phi_v)$ 的 Shalika 芽展开即为

$$\tilde{J}_v(ea, \Phi_v) = \sum_{\substack{b \in A_e^{w_1} \\ c \in A_{w_1} \\ bc = a}} L_e^{w_1}(b) \omega_{w_1}^{\Phi_v}(c) + \omega_e^{\Phi_v}(a), \quad a \in A_e,$$

其中 $L_e^{w_1}(b)$ $(b \in A_e^{w_1})$ 为 Shalika 芽，而 $\omega_e^{\Phi_v}(a)$ 为 A_e 上一个无穷次

可微且有紧支集的函数. 记 $a=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & -1/b\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}$, 则由于 Φ_v 在 $S(F_v)$ 上有紧支集, 如 $\tilde{J}_v(ea,\Phi_v)$ 非零, $a_1a_2=-c^2$ 属于 $F_v^\times$ 的一个紧子集, 故存在 $0<r<R$ 使得 $r\leqslant|c|_v\leqslant R$. 由于 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \bar{x} & 1\end{pmatrix}ea\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & *\\ * & *\end{pmatrix}$, 我们又有 $|a_1|_v\leqslant M$, 如 $\tilde{J}_v(ea,\Phi_v)$ 非零. 因此 Shalika 芽 $L_e^{w_1}\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & -1/b\end{pmatrix}$ 仅当 $|b|_v$ 小于某一个 N 时非零. 由于 $\omega_e^{\Phi_v}(a)$ 在 A_e 上有紧支集, 我们只需对于充分小的 $|b|_v$ 计算 $L_e^{w_1}(b)$.

定理(Jacquet、叶扬波[74]) 设 v 为 F 的一个非 Archimedes 赋值, 其在 $E=F(\sqrt{\tau})$ 上不分裂, 则对于充分小的 $|b|_v$ 有

$$L_e^{w_1}\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & -1/b\end{pmatrix}=|2b|_v^{-1/2}\psi_v\left(\frac{2}{b}\right)\gamma\left(\frac{2\tau}{b},\psi_v\right).$$

证明 与上节一样我们取充分大的 m, 记 $K_m(E_w)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle| a,d\in 1+\varpi_{E_w}^m R_{E_w}, b,c\in\varpi_{E_w}^m R_{E_w}\right\}$ 为 $K(E_w)$ 的一个主同余子群. 又取 Φ_v 为 $w_1K_m(E_w)\cap S(F_v)$ 的特征函数, 则

$$\tilde{J}_v(w_1,\Phi_v)=\int_{F_v}\Phi_v\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}\psi_v(x)\mathrm{d}x=\mathrm{vol}(\varpi_{E_w}^m R_{E_w}\cap F_v)$$

而

$$\tilde{J}_v(-w_1,\Phi_v)=\int_{F_v}\Phi_v\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -x\end{pmatrix}\psi_v(x)\mathrm{d}x=0.$$

另一方面对于 $b\in\varpi_v^m R_v$,

$$\tilde{J}_v\left(\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & -1/b\end{pmatrix},\Phi_v\right)=\int_{E_w}\Phi_v\begin{pmatrix}b & bx\\ b\bar{x} & bx\bar{x}-1/b\end{pmatrix}\psi_v(x+\bar{x})\mathrm{d}x,$$

这里我们取 E_w 上对应于 $\psi_v\circ\mathrm{tr}_{E_w/F_v}$ 的自对偶测度. 为了明确决定

这个测度，我们记 d 为二次扩域 E_w 相对于 F_v 的**差积**(different).如果 ψ_v 的阶数为 r，当 v 在 E 中非分歧时 $\psi_v \circ \mathrm{tr}$ 作为 E_w 上的特征其阶数仍为 r. 当 v 在 E 中分歧时，$\psi_v \circ \mathrm{tr}$ 的阶数就为 $2r+d$. E_w 上对应于 $\psi_v \circ \mathrm{tr}$ 的自对偶测度由

$$\mathrm{vol}(R_{E_w}) = \begin{cases} q_{E_w}^{r/2} = q_v^r, & \text{如果 } v \text{ 在 } E \text{ 中非分歧;} \\ q_{E_w}^{r+d/2} = q_v^{r+d/2}, & \text{如果 } v \text{ 在 } E \text{ 中分歧} \end{cases}$$

给出. 我们指出，当 v 在 E 中非分歧时，差积 $d=0$，故我们可永远设 $\mathrm{vol}(R_{E_w})=q_v^{r+d/2}$. 当 v 在 E 中分歧时，差积可用以下方法计算：如果 τ 在 $F_v^\times$ 中无平方因子，$\tau \in \varpi_v^j R_v^\times$ 中的 j 为奇数，记 $2 \in \varpi_v^l R_v^\times$，即 l 为 2 的阶数，则差积 $d=2l+1$. 如果 j 为偶数，则存在一个元素 $t \in \varpi_v^{j/2} R_v^\times$ 使得 $\sqrt{\tau}-t \in \varpi_{E_w}^k R_{E_w}^\times$，$k$ 为奇数，则 $d=2l+j-k+1$.

回到 $\tilde{J}_v\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}, \Phi_v\right)$ 的积分表达式. 可见被积函数仅当 $b \in \varpi_{E_w}^m R_{E_w} \cap F_v$ 时非零. 作变量替换 $y=bx$，则 $y \in 1+\varpi_{E_w}^m R_{E_w}$ 且 $bN_{E_w/F_v}(x)-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{b}(N_{E_w/F_v}(y)-1)$. 故

$$\tilde{J}_v\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}, \Phi_v\right) = |b|_v^{-2} \int\limits_{\substack{y \in \varpi_{E_w}^m R_{E_w} \\ N_{E_w/F_v}(y) \in 1+b\varpi_{E_w}^m R_{E_w}}} \psi_v\left(\frac{\mathrm{tr}_{E_w/F_v}(y)}{b}\right) \mathrm{d}y.$$

再通过 Taylor 级数作变量替换

$$y = \sqrt{1+bu}\left(\sqrt{1+x^2\tau}+x\sqrt{\tau}\right),$$

其中 $u \in \varpi_{E_w}^m R_{E_w} \cap F_v$ 而 $x \in \varpi_v^n R_v$，这里 n 为一与 b 无关的正数. 则

$$\mathrm{d}y = |b|_v |\tau|_v^{1/2} \mathrm{d}u \mathrm{d}x,$$

其中 $\mathrm{d}u$ 与 $\mathrm{d}x$ 均为 F_v 上对应于 ψ_v 的自对偶测度. 由于

$$\sqrt{1+bu} \in 1+\frac{b}{2}(\varpi_{E_w}^m R_{E_w} \cap F_v),$$

我们有

$$\psi_v\left(\frac{\operatorname{tr}_{E_w/F_v}(y)}{b}\right)=\psi_v\left(\frac{\sqrt{1+bu}}{b}\cdot 2\sqrt{1+x^2\tau}\right)$$

$$=\psi_v\left(\frac{2\sqrt{1+x^2\tau}}{b}\right).$$

于是

$$\mathcal{J}_v\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix},\Phi_v\right)$$

$$=|b|_v^{-1}|\tau|_v^{1/2}\operatorname{vol}(\varpi_{E_w}^m R_{E_w}\cap F_v)\int_{\varpi_v^n R_v}\psi_v\left(\frac{2\sqrt{1+x^2\tau}}{b}\right)\mathrm{d}x.$$

又通过

$$2\sqrt{1+x^2\tau}=2+t^2\tau \text{ 或 } t=\frac{x}{\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2\tau}+1}{2}}}$$

换变量，得 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t, t\in\varpi_v^p R_v$，其中 $p>0$ 为一大整数，则

$$\mathcal{J}_v\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix},\Phi_v\right)=|b|_v^{-1}|\tau|_v^{1/2}\psi_v\left(\frac{2}{b}\right)$$

$$\times\operatorname{vol}(\varpi_{E_w}^m R_{E_w}\cap F_v)\int_{\varpi_v^p R_v}\psi_v\left(\frac{t^2\tau}{b}\right)\mathrm{d}t.$$

按照上一节的计算，当 $|b|_v$ 充分小时，

$$\int_{\varpi_v^p R_v}\psi_v\left(\frac{t^2\tau}{b}\right)\mathrm{d}t=\left|\frac{2\tau}{b}\right|_v^{1/2}\gamma\left(\frac{2\tau}{b},\psi_v\right),$$

因此此时

$$\mathcal{J}_v\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix},\Phi_v\right)=|2b|_v^{-1/2}\psi_v\left(\frac{2}{b}\right)\gamma\left(\frac{2\tau}{b},\psi_v\right)$$

$$\times\operatorname{vol}(\varpi_{E_w}^m R_{E_w}\cap F_v).$$

由于

$$\mathcal{J}_v(w_1,\Phi_v)=\operatorname{vol}(\varpi_{E_w}^m R_{E_w}\cap F_v),$$

$$\tilde{J}_v(-w_1,\Phi_v)=0,$$

我们证得当$|b|_v$充分小时

$$L_c^{w_1}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}=|2b|_v^{-1/2}\psi_v\left(\frac{2}{b}\right)\gamma\left(\frac{2\tau}{b},\psi_v\right).$$

证毕.

§ 11　轨道积分的等式

为了比较$K_c^{w_1}(b)$与$L_c^{w_1}(b)$,$b\in A_c^{w_1}$,我们需要利用 Weil 常数之间的关系:

$$\gamma(ab^2,\psi_v)=\gamma(a,\psi_v),$$

$$\gamma(ab,\psi_v)=\gamma(a,\psi_v)\gamma(b,\psi_v)\gamma(1,\psi_v)^{-1}(a,b),$$

其中(a,b)为 Hilbert 符号. 则

$$\gamma\left(\frac{2\tau}{b},\psi_v\right)=\gamma\left(\frac{2}{b},\psi_v\right)\gamma(\tau,\psi_v)\gamma(1,\psi_v)^{-1}\left(\frac{2}{b},\tau\right),$$

而

$$\left(\frac{2}{b},\tau\right)=\eta_v\left(\frac{2}{b}\right).$$

故

$$L_c^{w_1}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}=c(E_w/F_v,\psi_v)\eta_v(b)K_c^{w_1}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix},$$

其中

$$c(E_w/F_v,\psi_v)=\gamma(\tau,\psi_v)\gamma(1,\psi_v)^{-1}\eta_v(2).$$

根据 Shalika 芽的这个关系,我们可建立轨道积分之间的等式.

定理　设v为F的一个非 Archimedes 赋值,其在E中不分裂,则给定一个$S(F_v)$上的函数Φ_v可以找到$G(F_v)$上的函数f_v,使得

$$\tilde{J}_v(w_1b,\Phi_v)=\eta_1(-b_1)\ \tilde{I}_v(w_1b,f_v),\quad w_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

及

$$\tilde{J}_v(ea,\Phi_v) = c(E_w/F_v,\psi_v)\eta(a_2)\ \tilde{I}_v(ea,f_v)$$

对所有 $a=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in A_e = A(F_v)$ 及 $b=\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \in A_{w_1} = Z(F_v)$ 成立，其中 $c(E_w/F_v,\psi_v)$ 如上所示. 反之，对给定的一个 f_v 可以找到一个 Φ_v 使上式对所有 $a\in A_e$ 及 $b\in A_{w_1}$ 亦成立.

证明 根据 Shalika 芽展开，

$$\tilde{I}_v(ea,f_v) = \sum_{\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = a} K_e^{w_1}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}\omega_{w_1}^{f_v}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \omega_e^{f_v}(a), \quad a \in A_e,$$

$$\begin{aligned}\tilde{J}_v(ea,\Phi_v) &= c(E_w/F_v,\psi_v) \sum_{\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = a} \eta_v(b) K_e^{w_1}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix} \\ &\quad \times \omega_{w_1}^{\Phi_v}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \omega_e^{\Phi_v}(a) \\ &= c(E_w/F_v,\psi_v)\eta_v^{-1}(a_2)\Bigg(\sum_{\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = a} K_e^{w_1}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -1/b \end{pmatrix} \\ &\quad \times \eta_v(-c)\omega_{w_1}^{\Phi_v}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + c(E_w/F_v,\psi_v)^{-1}\eta_v(a_2)\omega_e^{\Phi_v}(a)\Bigg),\end{aligned}$$

$$a \in A_e.$$

由于 $\omega_{w_1}^{f_v}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$，$\omega_e^{f_v}(a)$，$\eta_v(-c)\omega_{w_1}^{\Phi_v}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$，及 $c(E_w/F_v,\psi_v)^{-1}\times \eta_v(a_2)\omega_e^{\Phi_v}(a)$ 均可依函数 f_v 与 Φ_v 的选取而成为任意的有紧支集的函数(例如依照第四章§2选取 f_R的方法). 我们可以令

$$\omega_e^{f_v}(a) = c(E_w/F_v,\psi_v)^{-1}\eta_v(a_2)\omega_e^{\Phi_v}(a), \quad a \in A_e$$

与

$$\omega_{w_1}^{f_v}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \eta_v(-c)\omega_{w_1}^{\Phi_v}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

则

$$\tilde{I}_v\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, f_v\right) = \eta_v(-c)\ \tilde{J}_v\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \Phi_v\right)$$

及

$$\tilde{J}_v(ea, \Phi_v) = c(E_w/F_v, \psi_v)\eta_v(a_2)\ \tilde{I}_v(ea, f_v)$$

成立. 证毕.

上面定理中的等式是关于无 $Z(F_v)$ 积分的轨道积分来证明的. 为了得到 I_v 与 J_v 之间的等式, 我们看到

$$I_v(w_1, f_{1v}) = \int_{F_v^\times} \eta_v(z)\ \tilde{I}_v\left(w_1\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, f_{1v}\right) d^\times z,$$

$$I\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_{1v}\right) = \int_{F_v^\times} \eta_v(z)\ \tilde{I}_v\left(\begin{pmatrix} az & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, f_{1v}\right) d^\times z,$$

$$J_v(w_1, \Phi_v) = \int_{F_v^\times} \tilde{J}_v\left(w_1\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \Phi_v\right) d^\times z,$$

$$J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right) = \int_{F_v^\times} \tilde{J}_v\left(\begin{pmatrix} az & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \Phi_v\right) d^\times z,$$

其中 $w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 因此从以上定理我们得到以下局部轨道积分的等式:

$$J_v(w_1, \Phi_v) = \eta_v(-1)I_v(w_1, f_{1v}), \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

及

$$J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right) = c(E_w/F_v, \psi_v)I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_{1v}\right), \quad a \in F_v^\times,$$

其中 v 为 F 的一个非 Archimedes 赋值, 其在 E 中不分裂.

当 v 在 E 中分裂时, 我们已在 §2 结尾处看到当取 $\Phi_v = f_{1v}$ 时

$$J_v(w_1, \Phi_v) = I_v(w_1, f_{1v})$$

及

$$J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right) = I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_{1v}\right), \quad a \in F_v^\times.$$

我们要指出当 v 分裂时 η_v 为平凡特征，同时 τ 为 F_v 中的一个平方. 因此 $\eta_v(-1)=1$，且

$$c(E_w/F_v, \psi_v) = \gamma(1, \psi_v)\gamma(1, \psi_v)^{-1}\eta_v(2) = 1.$$

故上面在 v 分裂时的局部积分等式亦可写成

$$J_v(w_1, \Phi_v) = \eta_v(-1)I_v(w_1, f_{1v}),$$

及

$$J_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_v\right) = c(E_w/F_v, \psi_v)I_v\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_{1v}\right), \quad a \in F_v^\times.$$

这里的赋值可以是 Archimedes 的或者非 Archimedes 的.

当 v 为 F 的一个 Archimedes 赋值而在 E 中不分裂时，我们尚未证明局部轨道积分相等，这项工作可见参考文献[60]. 如果假设 F 的所有 Archimedes 赋值都在 E 中分裂，例如设 $F=\boldsymbol{Q}$ 而 $E=\boldsymbol{Q}(\sqrt{\tau})$ 为一个实二次代数数域，$\tau>0$，则我们已经可以建立起整体轨道积分之间的等式：

$$J(w_1, \Phi) = \eta(-1)I(w_1, f_1), \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

及

$$J\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi\right) = \prod_v c(E_w/F_v, \psi_v) \cdot I\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_1\right), \quad a \in \boldsymbol{A}_F^\times,$$

这里 $\eta=\prod_v \eta_v$ 在 $F^\times$ 上平凡，故 $\eta(-1)=1$. 可以证明

$$\prod_v c(E_w/F_v, \psi_v) = 1.$$

因此对应的整体轨道积分相等：

$$J(w_1, \Phi) = I(w_1, f_1)$$

及

$$J\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi\right) = I\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_1\right), \quad a \in \boldsymbol{A}_F^\times.$$

有了这两个等式，我们也就在所有 F 的 Archimedes 赋值都在 E 中分裂的假设下证明了相对迹公式.

§12 GL(2)群上的恒等式

在§8中我们曾证明了如下的一个定理：设 v 为代数数域 F 的一个在二次扩域 E 中不分裂非分歧的赋值，满足 $|2|_v=1$. 如果 ψ_v 的阶数为零，则对于任意的 $b\in\varpi_v^{2B}R_v^\times$，$B<0$，有

$$(-1)^B\int_{\varpi_v^B R_v^\times}\psi_v\left(x+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{\substack{y\in\varpi_{E_w}^B R_{E_w}^\times\\ N_{E_w/F_v}(y)\in b+\varpi_v^B R_v}}\psi_v\circ\mathrm{tr}_{E_w/F_v}(y)\mathrm{d}y.$$

如果解除这些限制条件，我们也能得到类似的局部恒等式. 这个一般的局部恒等式其实包含在§9至§11的证明中间. 由于其重要性，我们在此给出一个单独的证明. 为此取 $\boldsymbol{Q}$ 与其二次扩域 $L=\boldsymbol{Q}(\sqrt{\tau})$，其中 $\tau\neq 0,1$ 为一无平方因子整数，设 p 为一素数其在 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{\tau})$ 中不分裂. 回忆我们曾记 η_p 为 $\boldsymbol{Q}_p$ 中的一个积性实特征，其在 $N_{L_p/\boldsymbol{Q}_p}(L_p^\times)$ 上等于1，又记 d 为 L_p 相对于 $\boldsymbol{Q}_p$ 的差积.

定理 1（叶扬波[60],[73]） 设 p 在 $L=\boldsymbol{Q}(\sqrt{\tau})$ 中不分裂. 取 $B\in R_p^\times$，$c\in\varpi_p R_p$ 如 p 非分歧，$c\in\varpi_p^d R_p$ 如 p 分歧，则

$$\int_{\frac{1}{c}R_p^\times}\eta_p(x)\,\overline{\psi}_p\left(x+\frac{B}{xc^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=p^{-d/2}\lambda_{L_p/\boldsymbol{Q}_p}(\overline{\psi}_p)\sum_{\substack{\alpha\in R_{L_p}^\times/(1+cR_{L_p})\\ \alpha\overline{\alpha}\in\beta+cR_p}}\overline{\psi}\circ\mathrm{tr}_{L_p/\boldsymbol{Q}_p}\left(\frac{\alpha}{c}\right).$$

这里 $\lambda_{L_p/\boldsymbol{Q}_p}(\overline{\psi}_p)$ 为局部 λ 因子，其定义见参考文献[46]. 以下我们取 $A_{\boldsymbol{Q}}$ 上的一个特征 $\psi=\psi_{\boldsymbol{R}}\prod_p\psi_p$ 其在 $\boldsymbol{Q}$ 上恒为1，$\psi_{\boldsymbol{R}}$ 由 $\psi_{\boldsymbol{R}}(x)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}$ 给出，而每一个 ψ_p 的阶数均为零. 对于这样的一个特征，

$$\lambda_{L_p/Q_p}(\overline{\psi}_p)=\begin{cases}1, & \text{如果 } p>2, p\nmid\tau, \left(\dfrac{\tau}{p}\right)=-1;\\ 1, & \text{如果 } p=2, \tau\equiv 5 \pmod 8;\\ \mathrm{i}, & \text{如果 } p=2, \tau\equiv 3 \pmod 4;\\ 1, & \text{如果 } p=2, \tau\equiv 2 \pmod{16};\\ -1, & \text{如果 } p=2, \tau\equiv 10 \pmod{16};\\ \mathrm{i}, & \text{如果 } p=2, \tau\equiv 14 \pmod{16};\\ -\mathrm{i}, & \text{如果 } p=2, \tau\equiv 6 \pmod{16};\\ \left(\dfrac{-\tau_1}{p}\right)\dfrac{\sum\limits_{1\leqslant x<p}\left(\dfrac{x}{p}\right)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x/p}}{\left|\sum\limits_{1\leqslant x<p}\left(\dfrac{x}{p}\right)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x/p}\right|}, & \\ \qquad \text{如果 } p>2, p\mid\tau, \tau=p\tau_1. & \end{cases}$$

我们指出在前面的两种情况下 p 在 L 中非分歧，而在后面的六种情况下 p 在 L 中分歧. 当 $p>2, p\nmid\tau, \left(\dfrac{\tau}{p}\right)=1$ 时，或 $p=2, \tau\equiv 1 \pmod 8$时，$p$ 在 L 中分裂.

这个定理的证明与 § 8 的恒等式类似，惟一的不同之处是要对 $p=2$ 的情况与 $p>2, p\mid\tau$ 的情况逐个进行计算. 所要用到的局部 ϵ 因子的关系式为(局部 ϵ 因子的定义见 § 8.)

$$\epsilon(\chi,\overline{\psi}_p,\mathrm{d}x)\epsilon(\chi\eta_p,\overline{\psi}_p,\mathrm{d}x)$$
$$=\lambda_{L_p/Q_p}(\overline{\psi}_p)\epsilon(\chi\circ N_{L_p/Q_p},\overline{\psi}_p\circ \mathrm{tr}_{L_p/Q_p},p^{-d/2}\mathrm{d}x),$$

这里 χ 为 $\boldsymbol{Q}_p^{\times}$ 上的任意积性特征，等式左端的测度 $\mathrm{d}x$ 由 $\mathrm{vol}(R_p)=1$ 正规化了，而右端的测度 $\mathrm{d}x$ 满足 $\mathrm{vol}(R_{L_p})=1$，于是对于测度 $p^{-d/2}\mathrm{d}x$ 成立 $\mathrm{vol}(R_{L_p})=p^{-d/2}$(见参考文献[69]).

上述定理当 $c\in\varpi_p R_p$，如 p 非分歧或 $c\in\varpi_p^d R_p$，如 p 分歧时可改写为

$$\sum_{y\in R_p^\times/(1+cR_p)} \eta_p(y)\,\overline{\psi}_p\left(\frac{y+B/y}{c}\right)$$

$$= p^{-d/2}\eta_p(c)\lambda_{L_p/Q_p}(\tilde{\psi}_p) \sum_{\substack{\alpha\in R_{L_p}^\times/(1+cR_{L_p}),\\ \alpha\bar{\alpha}\in B+cR_p}} \overline{\psi}_p\circ \mathrm{tr}_{L_p/Q_p}\left(\frac{\alpha}{c}\right).$$

注意差积 d 当 $p>2, p\mid\tau$ 时等于 1，当 $p=2,\tau\equiv 3 \pmod 4$ 时等于 2，而当 $p=2,\tau\equiv 2 \pmod 4$ 时等于 3. 通过直接验证可得以下结果：

(1) 当 $p=2,\tau\equiv 3 \pmod 4$，$c\in\varpi_p R_p^\times$ 时，

$$\sum_{y\in R_p^\times/(1+cR_p)} \overline{\psi}_p\left(\frac{y+B/y}{c}\right) = p^{-d/2} \sum_{\substack{\alpha\in R_{L_p}^\times/(1+cR_{L_p}),\\ \alpha\bar{\alpha}\in B+cR_p}} \overline{\psi}_p\circ \mathrm{tr}_{L_p/Q_p}\left(\frac{\alpha}{c}\right).$$

(2) 当 $p=2,\tau\equiv 2 \pmod 4$，$c\in\varpi_p R_p^\times$ 时，

$$\sum_{y\in R_p^\times/(1+cR_p)} \overline{\psi}_p\left(\frac{y+B/y}{c}\right) = p^{(1-d)/2} \sum_{\substack{\alpha\in R_{L_p}^\times/(1+cR_{L_p}),\\ \alpha\bar{\alpha}\in B+cR_p}} \overline{\psi}_p\circ \mathrm{tr}_{L_p/Q_p}\left(\frac{\alpha}{c}\right).$$

(3) 当 $p=2,\tau\equiv 2 \pmod 4$，$c\in\varpi_p^2 R_p^\times$ 时，

$$\sum_{y\in R_p^\times/(1+cR_p)} \overline{\psi}_p\left(\frac{y+B/y}{c}\right) = (-1)^{(B-1)/2} p^{(1-d)/2}$$

$$\times \sum_{\substack{\alpha\in R_{L_p}^\times/(1+cR_{L_p}),\\ \alpha\bar{\alpha}\in B+cR_p}} \overline{\psi}_p\circ \mathrm{tr}_{L_p/Q_p}\left(\frac{\alpha}{c}\right).$$

我们可将上面的局部恒等式对所有 c 的不同素因子相乘起来. 在左端我们得到

$$\prod_{p\mid c} \sum_{y\in R_p^\times/(1+cR_p)} \eta_p(y)\,\overline{\psi}_p\left(\frac{y+B/y}{c}\right),$$

但是当 $2\mid c$ 而 $2^d \nmid c$ 时，我们得到

$$\sum_{y\in R_2^\times/(1+cR_2)} \overline{\psi}_2\left(\frac{y+B/y}{c}\right)\cdot \prod_{\substack{p\mid c\\ p>2}} \sum_{y\in R_p^\times/(1+cR_p)} \eta_p(y)\,\overline{\psi}_p\left(\frac{y+B/y}{c}\right).$$

我们将上述乘积中的各个 y 用满足

$$1\leqslant x\leqslant c,\quad (x,c)=1$$

的 x 来表示，则上述乘积等于

$$\sum_{\substack{1\leqslant x\leqslant c\\(x,c)=1}}\left(\prod_{\substack{p\text{分歧}\\p^d|c}}\eta_p(x)\right)\mathrm{e}^{2\pi i(x+B\bar{x})/c},$$

其中 $\bar{x}$ 不像通常那样表示 x 的复共轭，而是 $x(\bmod c)$ 的逆元素，即

$$x\,\bar{x}\equiv 1\ (\bmod c).$$

这里我们利用了

$$\psi=\psi_{\mathbf{R}}\prod_p\psi_p$$

在 $\boldsymbol{Q}$ 上恒等于 1 的事实，因此对于 $a\in\boldsymbol{Q}$ 成立

$$\prod_p\bar{\psi}_p(a)=\psi_{\mathbf{R}}(a)=\mathrm{e}^{2\pi ia}.$$

对局部恒等式乘积的右端我们用同样的手法处理. 例如当 $2\nmid c$ 时或 $2^d|c$ 时右端的乘积等于

$$\prod_{p|c}p^{-d/2}\eta_p(c)\lambda_{L_p/Q_p}(\bar{\psi}_p)\sum_{\substack{\alpha\in R_{L_p}^{\times}/(1+cR_{L_p})\\\alpha\bar{\alpha}\in B+cR_p}}\bar{\psi}_p\circ\mathrm{tr}_{L_p/Q_p}\left(\frac{\alpha}{c}\right).$$

但当 $2|c$ 而 $2^d\nmid c$ 时，上式中对应于 $p=2$ 的因子应改写为前述三个特殊恒等式的右端. 将这些乘积中的求和符号与乘积符号互换，我们就得下面的指数和恒等式.

定理 2 设 c 为一正整数而

$$B\neq 0,\quad (c,B)=1.$$

如果

$$\tau\equiv 1\ (\bmod 8),$$

我们要求 $2\nmid c$. 又设对于任意的 $p|c,p\nmid\tau$，成立 $\left(\frac{\tau}{p}\right)=-1$，则

$$\sum_{\substack{1\leqslant x\leqslant c\\(x,c)=1}}\left(\prod_{\substack{p\text{分歧}\\p^d|c}}\eta_p(x)\right)\mathrm{e}^{2\pi i(x+B\bar{x})/c}$$

$$
=\begin{cases}
\frac{1}{2}(-1)^{\Omega_{\text{unr}}(c)}\Big(\prod\limits_{\substack{p>2,p|c\\ p|\tau}} p^{-1/2}\eta_p(c)\lambda_{L_p/Q_p}(\overline{\psi}_p)\Big) \\
\quad\times\sum\limits_{\substack{1\leqslant a,b\leqslant 2c\\ a^2-\tau b^2\equiv 4B\ (\text{mod } 4c)}} e^{2\pi i a/c}, \quad \text{如果 } 2|c,\tau\equiv 5\ (\text{mod } 8); \\
\frac{1}{2}(-1)^{\Omega_{\text{unr}}(c)}(-1)^{(B-1)/2}\Big(\prod\limits_{\substack{p>2,p|c\\ p|\tau}} p^{-1/2}\eta_p(c)\lambda_{L_p/Q_p}(\overline{\psi}_p)\Big) \\
\quad\times\sum\limits_{\substack{1\leqslant a,b\leqslant c\\ a^2-\tau b^2\equiv B\ (\text{mod } c)}} e^{4\pi i a/c}, \quad \text{如果 } 4|c,8\nmid c,\tau\equiv 2\ (\text{mod } 4); \\
(-1)^{\Omega_{\text{unr}}(c)}e(c,\tau)\Big(\prod\limits_{\substack{p\text{分歧}\\ p|c}} p^{-d/2}\Big)\cdot\Big(\prod\limits_{\substack{p\text{分歧}\\ p^d\| c}}\eta_p(c)\lambda_{L_p/Q_p}(\overline{\psi}_p)\Big) \\
\quad\times\sum\limits_{\substack{1\leqslant a,b\leqslant c\\ a^2-\tau b^2\equiv B\ (\text{mod } c)}} e^{4\pi i a/c}, \quad \text{其他},
\end{cases}
$$

这里 $\Omega_{\text{unr}}(c)$为 c 的所有非分歧素因子的个数,计重数,而

$$
e(c,\tau)=\begin{cases}\sqrt{2}, & \text{如 } 2|c,4\nmid c \text{ 但 } \tau\equiv 2\ (\text{mod } 4);\\ 1, & \text{其他}.\end{cases}
$$

如果我们不考虑对 $Q(\sqrt{\tau})$来说分歧素数的情况,则上面的恒等式可以简化.

系理 设 c 为一正整数,满足$(c,\tau)=1$. 如果 $\tau\not\equiv 5\ (\text{mod } 8)$我们要求 $2\nmid c$. 又设对任何 c 的奇素因子 p 成立$\left(\frac{\tau}{p}\right)=-1$,则对任意非零 B,$(B,c)=1$,有

$$
\sum_{\substack{1\leqslant x\leqslant c\\ (x,c)=1}} e^{2\pi i(x+B\overline{x})/c}
=\begin{cases}
\frac{1}{2}(-1)^{\Omega(c)}\sum\limits_{\substack{1\leqslant a,b\leqslant 2c\\ a^2-\tau b^2\equiv 4B\ (\text{mod } 4c)}} e^{2\pi i a/c}, & \text{如果 } 2|c,\tau\equiv 5\ (\text{mod } 8);\\
(-1)^{\Omega(c)}\sum\limits_{\substack{1\leqslant a,b\leqslant c\\ a^2-\tau b^2\equiv B\ (\text{mod } c)}} e^{4\pi i a/c}, & \text{其他},
\end{cases}
$$

这里 $\Omega(c)$为 c 的所有素因子的个数,计重数.

可以看出，系理中恒等式的左边为经典 Kloosterman 和，而右边为取于 $Q(\sqrt{\tau})$ 的某些代数整数上的一个指数和. 综上所述，这个指数和恒等式在 GL(2)的相对迹公式的基本引理的证明中起了重要作用. 事实上，从相对迹公式的轨道积分的指数和展开式中可以看出，在局部球面函数 f_p 与 f'_p 满足基变换映射关系 $f_p = b(f'_p)$ 时，这个指数和恒等式是基本引理证明的决定性部分，等价于基本引理本身. 由此可见这个指数和恒等式以某种方式表现出了GL(2)上群表示到其二次扩域上的基变换，这就是这个指数和恒等式在群表示论上的意义.

§13　GL(3)及其他群上的恒等式

GL(3)上的相对迹公式已经被完全证明了(见 Jacquet 与叶扬波的文章[82],[83],[74],[75],[78])，其中的基本引理包含了下列指数和恒等式.

定理 1　设 c 为一正整数，满足 $(c,\tau)=1$. 如果 $\tau \not\equiv 5 \pmod 8$ 我们要求 $2 \nmid c$. 又设对任何 c 的奇素因子 p 有 $\left(\frac{\tau}{p}\right) = -1$，则对任意与 c 互素的 B 成立

$$\sum_{\substack{1\leqslant x_1, x_2\leqslant c\\(x_1,c)=(x_2,c)=1}} e^{2\pi i(x_1+x_2x_1+Bx_2)/c}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}(-1)^{\Omega(c)} \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant a,b\leqslant 2c\\(a^2-\tau b^2,4c)=4}} e^{\pi i(B(a^2-\tau b^2)+4a\Delta)/(2c)}, \\ \qquad \text{如果 } 2\mid c, \tau\equiv 5 \pmod 8; \\ (-1)^{\Omega(c)} \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant a,b\leqslant c\\(a^2-\tau b^2,c)=1}} e^{2\pi i(B(a^2-\tau b^2)+2a\overline{(a^2-\tau b^2)})/c}, \\ \qquad \text{其他}. \end{cases}$$

这里 Δ 由 $(a^2-\tau b^2)\Delta\equiv 4 \pmod{4c}$ 给出.

定理中的恒等式也可以像 GL(2)恒等式一样扩展到包含 c 的分歧素因子的情况，详细内容见叶扬波的文章[73]. GL(3)上面有两类不同的 Kloosterman 和，以上定理恒等式左端为第二类型的 Kloosterman 和，见参考文献[84]. 第一类型 Kloosterman 和的指数和恒等式见下面定理.

定理 2　设 c_1 与 c_2 为二正奇数满足

$$(c_1,\tau)=(c_2,\tau)=1.$$

设对任意素数 $p|c_1$ 或 $p|c_2$ 有 $\left(\frac{\tau}{p}\right)=-1$，则

$$\sum_{\substack{1\leqslant x_{23},y_{23}\leqslant c_2\\ x_{23}y_{23}\equiv -c_1 \pmod{c_2}}} e^{2\pi i(x_{23}+y_{23})/c_2} \sum_{\substack{1\leqslant x_{12},x_{13},y_{12},y_{13}\leqslant c_1\\ \begin{pmatrix} x_{12}\\ x_{13}\end{pmatrix}(y_{12}\quad y_{13}) \equiv -\begin{pmatrix} c_2 & y_{23}\\ x_{23} & (x_{23}y_{23}+c_1)/c_2\end{pmatrix} \pmod{c_1}}} e^{2\pi i(x_{12}+y_{12})/c_1}$$

$$=(-1)^{\Omega(c_1)+\Omega(c_2)} \sum_{\substack{1\leqslant a_{23},b_{23}\leqslant c_2\\ a_{23}^2-\tau b_{23}^2\equiv -c_1 \pmod{c_2}}} e^{4\pi i a_{23}/c_2}$$

$$\times \sum_{\substack{1\leqslant a_{12},a_{13},b_{12},b_{13}\leqslant c_1\\ \begin{pmatrix} a_{12}-b_{12}\sqrt{\tau}\\ a_{13}-b_{13}\sqrt{\tau}\end{pmatrix}(a_{12}+b_{12}\sqrt{\tau}\quad a_{13}+b_{13}\sqrt{\tau}) \\ \equiv -\begin{pmatrix} c_2 & a_{23}+b_{23}\sqrt{\tau}\\ a_{23}-b_{23}\sqrt{\tau} & (a_{23}^2-\tau b_{23}^2+c_1)/c_2\end{pmatrix} \pmod{c_1}}} e^{4\pi i a_{12}/c_1}.$$

对于 $n>3$，GL(n)上的相对迹公式尚未证明，但其基本引理所对应的一部分指数和恒等式是已知的. 其证明在此就不给出了.

定理 3　设 c 为一正奇数、B 为一非零整数，满足

$$(c,B)=(\tau,c)=1.$$

又设 c 的每一个素因子都大于给定的一个正整数 $n>1$，则

$$(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]\Omega_0(c)} \sum_{\substack{1\leqslant x_i\leqslant c\\ (x_i,c)=1\\ i=1,\cdots,n-1}} e^{2\pi i(x_1+x_2\bar{x}_1+\cdots+x_{n-1}\bar{x}_{n-2}+B\bar{x}_{n-1})/c}$$

$$
=\begin{cases}
\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant y_j, z_j\leqslant c\\ j=1,\cdots,n/2\\ (y_1^2-\tau z_1^2)\cdots(y_{n/2}^2-\tau z_{n/2}^2)\\ \equiv B\ (\mathrm{mod}\ c)}} e^{4\pi i(y_1+\cdots+y_{n/2})/c}, & \text{如果 } n \text{ 为偶数,}\\
\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant y_0, y_j, z_j\leqslant c\\ j=1,\cdots,(n-1)/2\\ 2y_0(y_1^2-\tau z_1^2)\cdots(y_{(n-1)/2}^2-\tau z_{(n-1)/2}^2)\\ \equiv B\ (\mathrm{mod}\ c)}} e^{4\pi i(y_0+\cdots+y_{(n-1)/2})/c}, & \text{如果 } n \text{ 为奇数,}
\end{cases}
$$

这里 $x\,\bar{x}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ c)$,而 $\Omega_0(c)$ 为 c 的满足 $\left(\dfrac{\tau}{p}\right)=-1$ 的素因子 p 的个数,计重数.

可见这个定理当 $n=3$ 时即为定理 1. 对 GL(4)我们还有类似的一个恒等式.

定理 4 设 c 为一个正奇数而 B 为一个非零整数,满足$(c,B)=(c,\tau)=1$,则

$$
\sum_{\substack{1\leqslant x_i\leqslant c\\ (x_i,c)=1\\ i=1,\cdots,4}} e^{2\pi i(x_1+x_2+x_2x_3+x_2x_3x_4+Bx_1x_4+Bx_1x_3)/c}
$$

$$
=\sum_{\substack{1\leqslant n, x_1, x_2, y_1, y_2\leqslant c\\ (n,c)=(x_1^2-\tau y_1^2,c)=(x_2^2-\tau y_2^2,c)=1\\ x_1^2-\tau y_1^2\equiv x_2^2-\tau y_2^2(\mathrm{mod}\ c)}} e^{2\pi i(n+Bn\overline{(x_1^2-\tau y_1^2)}+2\bar{n}(x_1+x_2))/c},
$$

这里 $n\,\bar{n}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ c)$.

这定理中恒等式的左方为 GL(4)上另一个类型的 Kloosterman 和. 当 n 变大时,GL(n)上 Kloosterman 和的种类亦增多,每一类 Kloosterman 和都应有一个对应的恒等式,这些恒等式实质上等价于 GL(n)的相对迹公式的基本引理.

回到局部域上. 仍设 F 为一代数数域,$E=F(\sqrt{\tau})$为其一个二次扩域. 取 F 的一个非 Archimedes 赋值 v,设其在 E 中不分裂非分歧,且满足 $|2|_v=|\tau|_v=1$. 设 ψ_v 为 F_v 上的一个特征,其阶数为零. 在 GL(n,F_v)中考虑以下的矩阵

$$w = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_r \end{pmatrix}, \quad w_i = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n_i, F_v),$$

$$n_1 + \cdots + n_r = n,$$

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} a_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_i \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n_i, F_v),$$

$$a_i \in F_v^{\times}.$$

记 $U_w(F_v)$ 为 $N(F_v)$ 的一个子群：

$$U_w(F_v) = \left\{ \begin{pmatrix} I_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & I_r \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, F_v) \right\},$$

其中 $I_i = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n_i, F_v)$. 又记 $N_w(F_v)$ 为 $N(E_w)$ 的一个子群，

$$N_w(F_v) = \{ n \in N(E_w) \mid {}^t\bar{n}\, wn = w \},$$

则以上的指数和恒等式都可写为如下的局部恒等式：

$$\int\limits_{\substack{u \in U_w(F_v) \\ n \in N(F_v) \\ {}^t uwan \in K(F_v)}} \psi_v(un) \mathrm{d}u \mathrm{d}n = \int\limits_{\substack{n \in N_w(F_v) \backslash N(E_w) \\ {}^t \bar{n} wan \in K(E_w)}} \psi_v(n \bar{n}) \mathrm{d}n.$$

事实上，定理 1 中的恒等式对应于 $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，定理 2 对应于 $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 定理 3 用

$$w = \begin{pmatrix} 0 & & 1 & 0 \\ & \iddots & & \vdots \\ 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

而定理 4 取

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

猜想上面这个局部指数和恒等式对所有上述一般的 w 与 a 都成立，这个猜想应该等价于 GL(n)上相对迹公式的基本引理.

这局部恒等式的左边可称为 Kloosterman 和在 GL(n)上的局部形式.

第六章　相对迹公式(谱分解部分)

§1　核函数 K^f_{cont}的积分

我们在上一章计算的结果得出了相对迹公式如下的形式(见第五章§1结尾部分)：

$$\begin{aligned}&\int_{F\backslash A_F}\int_{F\backslash A_F}K^f_{\text{cusp}}\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}\right)\overline{\psi}(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\qquad-\int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)}\int_{E\backslash A_E}K^{f_1}_{\text{cusp}}\left(g,\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\right)\psi\circ\mathrm{tr}_{E/F}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g\\&\quad=\int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)}\int_{E\backslash A_E}K^{f_1}_{\text{cont}}\left(g,\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\right)\psi\circ\mathrm{tr}_{E/F}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g\\&\qquad-\int_{F\backslash A_F}\int_{F\backslash A_F}K^f_{\text{cont}}\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}\right)\overline{\psi}(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

这里右边第一个积分的收敛性尚需证明.由这个积分的收敛性可推出左边第二个积分的收敛性.为了应用这个相对迹公式,我们要对这里两边共四个积分都进行计算.本节先计算右边第二个积分.

我们已知(见第四章§5)

$$\begin{aligned}K^f_{\text{cont}}(h,g)=\frac{1}{4\pi}\sum_{\mu\nu=\eta}\ \sum_{\alpha,\beta\in I}\int_{-\infty}^{+\infty}(\pi(\mathrm{i}t,\mu,\nu)(f)\phi_\beta,\phi_\alpha)\\\times E(h,\phi_\alpha,\mathrm{i}t,\mu,\nu)\,\overline{E}(g,\phi_\beta,\mathrm{i}t,\mu,\nu)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

由于 $F\backslash A_F$ 紧致,积分

$$\int_{F\backslash A_F}\int_{F\backslash A_F}K^f_{\text{cont}}\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}\right)\overline{\psi}(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

绝对收敛.设 $\phi(g)=\phi(g,s)=\phi(g,s,\mu,\nu)$为一个满足条件

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} g\right) = \mu(a)\nu(b)\left|\frac{a}{b}\right|_{A_F}^{s+\frac{1}{2}}\phi(g)$$

及

$$\int_{K(A_F)} |\phi(k)|^2 \mathrm{d}k < +\infty$$

的函数，则

$$E(g,\phi,s,\mu,\nu) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \phi(\gamma g, s), \quad \mathrm{Re}\, s > 1/2.$$

对于 $\mathrm{Re}\, s > 1/2$，我们有

$$\int_{F\backslash A_F} E\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi, s, \mu, \nu\right) \overline{\psi}(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{F\backslash A_F} \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \phi\left(\gamma \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s, \mu, \nu\right) \overline{\psi}(x)\mathrm{d}x.$$

如果 $\gamma \in P(F)$，即 $\gamma = 1$，则 $\phi\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，对 x 的积分因此等于零. 如果 $\gamma = w_1\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$，$n \in F$，则我们可得

$$\int_{F\backslash A_F} \sum_{n \in F} \phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n+x \end{pmatrix}, s, \mu, \nu\right) \overline{\psi}(x)\mathrm{d}x.$$

由于 ψ 在 F 上平凡，有

$$\int_{F\backslash A_F} E\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi, s, \mu, \nu\right) \overline{\psi}(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{A_F} \phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}, s, \mu, \nu\right) \overline{\psi}(x)\mathrm{d}x.$$

现在我们考虑上式右边积分的局部积分

$$\int_{F_v} \phi_v\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}, s, \mu_v, \nu_v\right) \overline{\psi}_v(x)\mathrm{d}x.$$

我们要指出每个这样的局部积分都可解析延拓使其在 $\mathrm{i}\boldsymbol{R}$ 上解析，且在 $s = \mathrm{i}t$ 时对于 t 都至多是多项式增长.

事实上，当 v 为非 Archimedes 赋值时，利用

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/x & 1 \end{pmatrix}$$

我们有

$$\int_{F_v} \phi_v\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}, s, \mu_v, \nu_v\right) \overline{\psi}_v(x) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{R_v} \phi_v\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}, s, \mu_v, \nu_v\right) \overline{\psi}_v(x) \mathrm{d}x$$

$$+ \int_{x \notin R_v} \mu_v^{-1} \nu_v(x) |x|_v^{-1-2s} \phi_v\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/x & 1 \end{pmatrix}, s, \mu_v, \nu_v\right) \overline{\psi}_v(x) \mathrm{d}x.$$

这里右边第一个积分的被积分式对所有的 $s \in \boldsymbol{C}$ 都一致有界，故该积分为 $\mathrm{i}\boldsymbol{R}$ 上的一解析函数，且在 $\mathrm{i}\boldsymbol{R}$ 上有界. 对于右边第二个积分，由于 ϕ_v 是一个局部常数函数，故存在 $N>0$，当 $x \notin \varpi_v^{-N} R_v$ 时，

$$\phi_v\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/x & 1 \end{pmatrix}, s, \mu_v, \nu_v\right) = \phi_v\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故得

$$\int_{\substack{x \in \varpi_v^{-N} R_v \\ x \notin R_v}} \mu_v^{-1} \nu_v(x) |x|_v^{-1-2s} \phi_v\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/x & 1 \end{pmatrix}, s, \mu_v, \nu_v\right) \overline{\psi}_v(x) \mathrm{d}x$$

$$+ \phi_v\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{n>N} q_v^{-(1+2s)n} \int_{\varpi_v^{-n} R_v^\times} \mu_v^{-1} \nu_v(x) \overline{\psi}_v(x) \mathrm{d}x.$$

这里第一个积分绝对收敛，为 $\mathrm{i}\boldsymbol{R}$ 上的解析函数，且对 t 有界. 而第二个积分仅当 n 等于 $\mu_v^{-1}\nu_v$ 的前导子与 ψ_v 的阶数的和时非零，故亦为 $\mathrm{i}\boldsymbol{R}$ 上的解析函数，且对 t 有界.

当 $F_v = \boldsymbol{R}$ 时，我们有

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 1/\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

其中 $x = \cot\theta, 0 < \theta < \pi$. 因此

$$\phi_v\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}, s, \mu_v, \nu_v\right)$$

$$= \mu_v(-\sin\theta)\nu_v^{-1}(\sin\theta)|\sin^2\theta|_{\mathbb{R}}^{s+1/2}\phi_v\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

故

$$\int_{F_v}\phi_v\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}, s, \mu_v, \nu_v\right)\overline{\psi}_v(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathbb{R}}(1+x^2)^{-\mathrm{i}r-s-1/2}\phi_v\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x,$$

其中 $\mu_v(z)=z^{\mathrm{i}r}$，$\psi_v(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$，$k\neq 0$，$x=\cot\theta$，$0<\theta<\pi$. 当 $x\to\pm\infty$ 时，

$$\phi_v\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

趋向于 $\phi_v\begin{pmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix}$. 因此对于任意常数 $c>0$，我们有

$$\int_{F_v}\phi_v\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}, s, \mu_v, \nu_v\right)\overline{\psi}_v(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-c}^{c}(1+x^2)^{-\mathrm{i}r-s-1/2}\phi_v\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{c}^{+\infty}(1+x^2)^{-\mathrm{i}r-s-1/2}\left(\phi_v\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} - \phi_v\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{-\infty}^{-c}(1+x^2)^{-\mathrm{i}r-s-1/2}\left(\phi_v\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} - \phi_v\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$$+ \phi\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\int_{c}^{+\infty}(1+x^2)^{-\mathrm{i}r-s-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$$+ \phi\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\int_{-\infty}^{-c}(1+x^2)^{-\mathrm{i}r-s-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x.$$

可以看出上式右边每一个积分当 $s=\mathrm{i}t$ 时都收敛，且都是 $\mathrm{i}\boldsymbol{R}$ 上的一个解析函数. 前三个积分均绝对收敛，故为 t 的有界函数. 对第四个积分用分部积分法得

$$(1+c^2)^{-\mathrm{i}r-s-1/2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kc}}{\mathrm{i}k}+\frac{2\mathrm{i}}{k}\left(\mathrm{i}r+s+\frac{1}{2}\right)\int_c^{\infty}(1+x^2)^{-\mathrm{i}r-s-3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x.$$

由于这里的积分绝对收敛，上式对于 $s=\mathrm{i}t$ 为 t 多项式增长函数. 第五个积分的性质类似.

当 $F_v=\boldsymbol{C}$ 时用类似的方法可得到关于积分

$$\int_{F_v}\phi_v\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix},x,\mu_v,\nu_v\right)\overline{\psi}_v(x)\mathrm{d}x$$

类似的结果.

记 P 为 F 的赋值集合的一个有限子集合，设其包含所有 F 的 Archimedes 赋值. 对于给定的一个函数 $\phi=\prod_v\phi_v$，我们取 P 使得对所有的 $v\notin P$，μ_v 与 ν_v 均为非分歧特征，ψ_v 的阶数为零，且 ϕ_v 在 $K(F_v)$ 上平凡，则当 $v\notin P$ 时，

$$\int_{F_v}\phi_v\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix},s,\mu_v,\nu_v\right)\overline{\psi}_v(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{R_v}\phi_v\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix},s,\mu_v,\nu_v\right)\overline{\psi}_v(x)\mathrm{d}x$$

$$+\int_{x\notin R_v}\phi_v\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix},s,\mu_v,\nu_v\right)\overline{\psi}_v(x)\mathrm{d}x.$$

上式右边第一项中 $\phi_v\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}=1$，故积分等于 1. 利用前面用过的

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/x & 1\end{pmatrix}$$

可知第二项等于

$$\int_{x\notin R_v}\mu_v^{-1}(x)\nu_v(x)\left|\frac{1}{x^2}\right|_v^{s+1/2}\overline{\psi}_v(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x\notin R_v}\mu_v^{-1}\nu_v(x)\,|x|_v^{-2s-1}\,\overline{\psi}_v(x)\mathrm{d}x.$$

由于 ψ_v 的阶数为零右边的积分仅当 $x\in\varpi_v^{-1}R_v^\times$ 时非零，其等于

$$-\mu_v^{-1}\nu_v(\varpi_v^{-1})q_v^{-2s-1}=-\mu_v^2\eta_v(\varpi_v)q_v^{-2s-1}.$$

因此当 $v\notin P$ 时，

$$\int_{F_v}\phi_v\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&x\end{pmatrix},s,\mu_v,\nu_v\right)\overline{\psi}_v(x)\mathrm{d}x=1-\mu_v^2\eta_v(\varpi_v)q_v^{-2s-1}.$$

对整体积分来说我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{F\backslash A_F}E\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\phi,s,\mu,\nu\right)\overline{\psi}(x)\mathrm{d}x\\&\quad=L^{-1}(F,P,\mu^2\eta,2s+1)\\&\qquad\times\prod_{v\in P}\int_{F_v}\phi_v\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&x\end{pmatrix},s,\mu_v,\nu_v\right)\overline{\psi}_v(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中

$$L(F,P,\mu^2\eta,2s+1)=\prod_{v\notin P}(1-\mu_v^2\eta_v(\varpi_v)q_v^{-2s-1})^{-1}$$

为一个不完全 L-函数.

根据 L-函数的理论这个 L-函数在 $\mathrm{i}\boldsymbol{R}$ 上解析且非零，故结合局部积分

$$\int_{F_v}\phi_v\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&x\end{pmatrix},s,\mu_v,\nu_v\right)\overline{\psi}_v(x)\mathrm{d}x,\ v\in P$$

在 $\mathrm{i}\boldsymbol{R}$ 上的解析性质，可知整体积分

$$\int_{F\backslash A_F}E\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\phi,s,\mu,\nu\right)\overline{\psi}(x)\mathrm{d}x$$

在 $\mathrm{i}\boldsymbol{R}$ 上解析. 又我们知道 $L^{-1}(F,P,\mu^2\eta,2s+1)$ 在 $\mathrm{i}\boldsymbol{R}$ 上对 t 为多项式增长，可知对 $s=\mathrm{i}t$，存在 $n>0$ 使得

$$\int_{F\backslash A_F}E\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\phi,s,\mu,\nu\right)\overline{\psi}(x)\mathrm{d}x=O(t^n).$$

另一方面，对于有紧支集的函数 f 来说我们定义 $\widetilde{f}(g)=\int_{Z(A_F)}f(zg)\eta(z)\mathrm{d}z$，则

$$(\pi(\mathrm{i}t,\mu,\nu)(\widetilde{f})\phi_\beta,\phi_\alpha)$$
$$=\int_{K(A_F)}\int_{Z(A_F)\backslash G(A_F)}\widetilde{f}(g)\phi_\beta(kg,\mathrm{i}t,\mu,\nu)\overline{\phi}_\alpha(k)\mathrm{d}k\mathrm{d}g$$
$$=\int_{K(A_F)}\int_{K(A_F)}\int_{A_F^\times}\int_{A_F}\widetilde{f}\left(k^{-1}\begin{pmatrix}a & ax\\ 0 & 1\end{pmatrix}k'\right)$$
$$\times\phi_\beta(k')\overline{\phi}_\alpha(k)\mu(a)|a|_{A_F}^{it+1/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times a\mathrm{d}k\mathrm{d}k'$$

为一个无穷次可微并且具有紧支集函数的 Fourier 变换，故 $(\pi(\mathrm{i}t,\mu,\nu)(\widetilde{f})\phi_\beta,\phi_\alpha)$ 为 t 的一个 Schwartz 函数.

通过以上的计算，我们在第四章得到的连续谱核函数的积分式子可进一步写为

$$\int_{F\backslash A_F}\int_{F\backslash A_F}K_{\mathrm{cont}}^f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\overline{\psi}(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\sum_{\mu\nu=\eta}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi(\mathrm{i}t,\mu,\nu)^\wedge(\widetilde{f}^S)$$
$$\times\left[\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha,\beta\in I}\int_{K(F_A)}\int_{K(F_A)}\phi_\beta(k')\overline{\phi}_\alpha(k)\mathrm{d}k\mathrm{d}k'\right.$$
$$\times\int_{F_S^\times}\int_{F_S}\widetilde{f}_S\left(k_S^{-1}\begin{pmatrix}a & ax\\ 0 & 1\end{pmatrix}k_S'\right)\mu_S(a)|a|_{F_S}^{it+1/2}\mathrm{d}^\times a\mathrm{d}x$$
$$\times\int_{F\backslash A_F}E\left(\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix},\phi_\alpha,\mathrm{i}t,\mu,\nu\right)\overline{\psi}(y)\mathrm{d}y$$
$$\left.\times\int_{F\backslash A_F}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix},\phi_\beta,\mathrm{i}t,\mu,\nu\right)\psi(z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}t,\tag{1}$$

其中 S 为 F 的不同赋值的一个有限集合，包含所有的 Archimedes 赋值，所有在 E 中分歧赋值，所有 $|2|_v\neq1$ 的赋值及 $f_v\notin\mathscr{H}(G(F_v),K(F_v))$，即非左右 $K(F_v)$ 不变的赋值. 而

$$f^S=\prod_{v\notin S}f_v,\quad f_S=\prod_{v\in S}f_v,\quad F_S^\times=\prod_{v\in S}F_v^\times,\quad F_S=\prod_{v\in S}F_v,$$
$$k_S=\prod_{v\in S}k_v,\quad k_S'=\prod_{v\in S}k_v'\quad \mu_S=\prod_{v\in S}\mu_v,\quad |a|_{F_S}=\prod_{v\in S}|a|_v,$$

其中 $k_v, k'_v \in K(F_v)$. 同时

$$\pi(\mathrm{i}t,\mu,\nu)^{\wedge}(\widetilde{f}^S) = \prod_{v\notin S}\int_{F_v^\times}\int_{F_v} f_v\begin{pmatrix} a & ax \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mu_v(a)\,|a|_v^{\mathrm{i}t+1/2}\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}x$$

是对应于群表示 $\pi(\mathrm{i}t,\mu,\nu)$ 的 $\mathscr{H}(G(F^S),K(F^S),\eta^S)$ 上的特征，即从 $\mathscr{H}(G(F^S),K(F^S),\eta^S)$ 到 $C^\times$ 中单位圆上的一个同态，而 $\mathscr{H}(G(F^S),K(F^S),\eta^S)$ 是由 $G(F^S)$ 上的左右 $K(F^S)$ 不变、局部常数、中心特征为 $\eta^S=\prod_{v\notin S}\eta_v$、模中心紧支集函数组成的 Hecke 代数.

我们前面证明了

$$\int_{F\backslash A_F} E\left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\phi_\alpha,s,\mu,\nu\right)\overline{\psi}(y)\mathrm{d}y$$

与

$$\int_{F\backslash A}\overline{E}\left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\phi_\beta,s,\mu,\nu\right)\psi(z)\mathrm{d}z$$

均为 $\mathrm{i}\boldsymbol{R}$ 上的解析函数且对于 $s=\mathrm{i}t$ 为 $O(t^n)$. 我们又证明了 $(\pi(\mathrm{i}t,\mu,\nu)(\widetilde{f})\phi_\beta,\phi_\alpha)$ 为 t 的 Schwartz 函数. 故上式对 t 积分的被积函数亦为 t 的一个 Schwartz 函数，因此这个积分绝对收敛.

我们以下记 K^f_{cont} 的积分(1)式右边方括号里的式子为 $c(f_S,\mathrm{i}t,\mu)$.

§2 Eisenstein 级数上的截算子

我们下面要计算的是

$$\int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)}\int_{E\backslash A_E} K^{f_1}_{\mathrm{cont}}\left(g,\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\psi\circ\mathrm{tr}_{E/F}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g,$$

其中

$$K^{f_1}_{\mathrm{cont}}(g,h) = \frac{1}{4\pi}\sum_{\mu\nu=1}\sum_{\alpha,\beta\in I}\int_{-\infty}^{+\infty}(\Pi(\mathrm{i}t,\mu,\nu)(\widetilde{f}')\phi'_\beta,\phi'_\alpha)$$
$$\times E(g,\phi'_\alpha,\mathrm{i}t,\mu,\nu)\,\overline{E}(h,\phi'_\beta,\mathrm{i}t,\mu,\nu)\mathrm{d}t.$$

我们下面要设 $\mu\nu=1$，即 $\nu=\mu^{-1}$. 与以前类似我们有 Hilbert 空间 $H(s,\mu,\nu)$ 及 $H(\mu,\nu)$，标准正交基 $\{\phi'_\alpha\}_{\alpha\in I}$，$H(s,\mu,\nu)$ 上的群表示 $\Pi(s,\mu,\nu)$，及对应的 Eisenstein 级数 $E(g,\phi',s,\mu,\nu)$. 我们设函数 f'_1 为 $K(\mathbf{A}_E)$ 有限函数，见第三章 § 6. 核函数 $K^{f'_1}_{\text{cont}}$ 对 $x\in E\backslash\mathbf{A}_E$ 的积分由于取于紧致集合 $E\backslash\mathbf{A}_E$，其积分收敛性为显然. 但是 $K^{f'_1}_{\text{cont}}$ 对 $g\in Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$ 积分的收敛性需要证明，为此我们要用截算子.

前面已经定义过截算子，现在我们要用到一个限制截算子

$$\Lambda^T h(g)=h(g)-\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\chi_T(H(\gamma g))\int_{E\backslash\mathbf{A}_E}h\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\gamma g\right)\mathrm{d}x,$$

其中 χ_T 为 $[T,+\infty)$ 的特征函数，$H\left(\begin{pmatrix}a & x\\ 0 & b\end{pmatrix}k\right)=\left|\dfrac{a}{b}\right|_{\mathbf{A}_E}$，$a,b\in\mathbf{A}_E^\times$，$x\in\mathbf{A}_E$，$k\in K(\mathbf{A}_E)$. 这个限制截算子的特点是其对 γ 求的和不取于 $P(E)\backslash G(E)$，而取于 $P(F)\backslash G(F)$. 将此限制截算子作用到 Eisenstein 级数上，我们有

$$\Lambda^T E(g,\phi',s,\mu,\nu)=E(g,\phi',s,\mu,\nu)$$
$$-\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}E_N(\gamma g,\phi',s,\mu,\nu)\chi_T(H(\gamma g)),$$

其中 E_N 为 Eisenstein 级数的常数项，

$$E_N(\gamma g,\phi',s,\mu,\nu)=\int_{N(E)\backslash N(\mathbf{A}_E)}\sum_{\xi\in P(E)\backslash G(E)}\phi'(\xi n\gamma g)\mathrm{d}n$$
$$=\phi'(\gamma g,s)+(M(s)\phi')(\gamma g,-s,\nu,\mu),$$

这里 $M(s)=M(s,\mu,\nu)$ 为从 $H(s,\mu,\nu)$ 到 $H(-s,\nu,\mu)$ 的缠结算子

$$M(s)\phi'(g)=\int_{N(\mathbf{A}_E)}\phi'(wng,s)\mathrm{d}n.$$

因此

$$\Lambda^T E(g,\phi',s,\mu,\nu)=\sum_{\xi\in P(E)\backslash G(E)}\phi'(\xi g,s)$$
$$-\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\phi'(\gamma g,s)\chi_T(H(\gamma g))$$

$$- \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} (M(s)\phi')(\gamma g, -s)\chi_T(H(\gamma g)).$$

这实际上就是 Arthur 关于 Eisenstein 级数的截算子的第二公式(见参考文献[76])在 GL(2)情形下的特殊形式(见参考文献[77]),其中我们取 $\mathrm{Re}\, s>1/2$ 并将其解析延拓至 $i\boldsymbol{R}$.

设

$$\lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\tau} & 1 \\ -\sqrt{\tau} & 1 \end{pmatrix},$$

其中 τ 给出 $E=F(\sqrt{\tau})$ 并记 $L=\lambda^{-1}P(E)\lambda \cap G(F)$. 利用不相交分解

$$G(E) = P(E)G(F) \cup P(E)\lambda G(F)$$

(此式可直接验证,一般情况则见参考文献[63])我们得到

$$\begin{aligned} \Lambda^T E(g,\phi',s,\mu,\nu) = & \sum_{\gamma \in L^{\times}(F)\backslash G(F)} \phi'(\lambda\gamma g, s) \\ & + \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \phi'(\gamma g, s)(1-\chi_T(H(\gamma g))) \\ & - \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} (M(s)\phi')(\gamma g, -s)\chi_T(H(\gamma g)). \end{aligned}$$

在参考文献[78] §5 中 Jacquet 考虑了 $\Lambda^T E$ 上述级数展开式的一个强级数

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in L^{\times}(F)\backslash G(F)} |\phi'(\lambda\gamma g, s)| \\ & + \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} |\phi'(\gamma g, s)|(1-\chi_T(H(\gamma g))) \\ & + \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} |M(s)\phi'(\gamma g, -s)|\chi_T(H(\gamma g)), \quad \mathrm{Re}\, s > 1/2, \end{aligned}$$

并证明了这个强级数在某一个 Siegel 区域中小于 $H(g)=\left|\frac{a}{b}\right|_{A_E}$ $\left(g=\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix}k\right)$ 的一个常数倍数,由此他证明了这个强级数在 $Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)$ 上可积且其级数展开式可逐项积分.

我们进而考虑

$$\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\Lambda^T E(g,\phi',s,\mu,\nu)\mathrm{d}g.$$

对任意 $E^\times\backslash\mathbf{A}_E^\times$ 上的酉特征 μ，设 $\mathbf{A}_F^1=\{x\in\mathbf{A}_F^\times \mid |x|_{\mathbf{A}_F}=1\}$，

$$\delta(\mu)=\begin{cases}\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbf{A}_F^1), & \text{如果 } \mu \text{ 在 } \mathbf{A}_F^\times \text{ 上平凡}, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

及

$$\varepsilon(\mu)=\begin{cases}\mathrm{vol}(\mathbf{A}_F^\times E^\times\backslash\mathbf{A}_E^\times), & \text{如果对所有 } a\in\mathbf{A}_E^\times \\ & \text{成立 } \mu(a)=\mu(\bar{a}), \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

这里上式中 $\varepsilon(\mu)$ 非零情况的条件等价于要求 μ 在 $\mathbf{A}_E^0=\{x\in\mathbf{A}_E^\times \mid N_{\mathbf{A}_E/\mathbf{A}_F}(x)=1\}$ 上等于 1. 回忆从 $H(s,\mu,\mu^{-1})$ 到 $H(-s,\mu^{-1},\mu)$ 的缠结算子 $M(s,\mu,\mu^{-1})$ 的定义是

$$(M(s,\mu,\mu^{-1})\phi')(g,-s)=\int_{\mathbf{A}_E}\phi'\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}g,s\right)\mathrm{d}s,\quad \mathrm{Re}\ s>1/2,$$

再解析延拓至 $\mathbf{C}$. 当 μ 在 $\mathbf{A}_E^0$ 上平凡时定义

$$I(s,\mu,\mu^{-1})\phi'=\int_{L^\times(\mathbf{A}_F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\phi'(\lambda g,s,\mu,\mu^{-1})\mathrm{d}g,\quad \mathrm{Re}\ s>1/2,$$

再解析延拓至全平面. 则根据 Jacquet、黎景辉[45]与 Jacquet[78]的文章，我们可对 $\Lambda^T E(g,\phi',s,\mu,\mu^{-1})$ 逐项积分：

$$\begin{aligned}&\int_{Z(\mathbf{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\Lambda^T E(g,\phi',s,\mu,\mu^{-1})\mathrm{d}g\\ &\quad=\int_{Z(\mathbf{A}_F)P(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\phi'(g,s)(1-\chi_T(H(g)))\mathrm{d}g\\ &\qquad+\int_{Z(\mathbf{A}_F)L^\times(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}\phi'(\lambda g,s)\mathrm{d}g\\ &\qquad-\int_{Z(\mathbf{A}_F)P(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)}(M(s)\phi')(g,-s)\chi_T(H(g))\mathrm{d}g,\\ &\qquad\qquad \mathrm{Re}\ s>1/2.\end{aligned}$$

根据参考文献[45]中的计算，当取 $g=\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\0 & 1\end{pmatrix}k, x\in \boldsymbol{A}_F$，$a\in \boldsymbol{A}_F^\times, k\in K(\boldsymbol{A}_F)$时，上面右边第一个积分等于

$$\int_{\boldsymbol{A}_F^\times}\mu(a)\,|a|_{\boldsymbol{A}_E}^{s+1/2}(1-\chi_T(|a|_{\boldsymbol{A}_E}))\,|a|_{\boldsymbol{A}_F}^{-1}\mathrm{d}^\times a$$

$$\times\int_{K(\boldsymbol{A}_F)}\phi'(k)\mathrm{d}k,\quad \mathrm{Re}\, s>1/2.$$

当 μ 在 $\boldsymbol{A}_F^1$ 上非平凡时这个积分等于零. 当 μ 在 $\boldsymbol{A}_F^1$ 上平凡时我们有 $\mu(a)=|a|_{\boldsymbol{A}_E}^r, r\in \boldsymbol{C}$. 由于在定义 $\phi'\left(\begin{pmatrix}a & x\\0 & b\end{pmatrix}k\right)$时我们可假设此时 $r=0$，我们得知此时 μ 在 $\boldsymbol{A}_F^\times$ 上亦平凡. 于是上面积分等于

$$\mathrm{vol}(F^\times\backslash \boldsymbol{A}_F^1)\int_0^{T^{1/2}}t^{2s}\mathrm{d}^\times t\int_{K(\boldsymbol{A}_F)}\phi'(k)\mathrm{d}k.$$

因此第一个积分等于

$$\delta(\mu)\,\frac{T^s}{2s}\int_{K(\boldsymbol{A}_F)}\phi'(k)\mathrm{d}k,\quad \mathrm{Re}\, s>1/2.$$

此式显然可解析延拓至 i$\boldsymbol{R}$，且在 $s=0$ 处有一单极点.

对于第二个积分，我们取 $g=lh, l\in Z(\boldsymbol{A}_F)L^\times(F)\backslash L^\times(\boldsymbol{A}_F)$及 $h\in L^\times(\boldsymbol{A}_F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)$，则得到

$$\int_{L^\times(\boldsymbol{A}_F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\phi'(\lambda h,s)\mathrm{d}h\int_{\boldsymbol{A}_F^\times E^\times\backslash \boldsymbol{A}_E^\times}\left|\frac{\bar{t}}{t}\right|_{\boldsymbol{A}_E}^{s+1/2}\mu\left(\frac{\bar{t}}{t}\right)\mathrm{d}^\times t,\quad \mathrm{Re} s>1/2,$$

当 μ 在 $\boldsymbol{A}_E^0$ 上不平凡时这积分为零，当 μ 在 $\boldsymbol{A}_E^0$ 上平凡时，有

$$\mathrm{vol}(\boldsymbol{A}_F^\times E^\times\backslash \boldsymbol{A}_E^\times)\int_{L^\times(\boldsymbol{A}_F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\phi'(\lambda h,s)\mathrm{d}h,\quad \mathrm{Re} s>1/2.$$

故第二个积分等于

$$\epsilon(\mu)I(s,\mu,\mu^{-1})\phi',\quad \mathrm{Re} s>1/2.$$

Jacquet、黎景辉[45]及 Jacquet[78]证明了这个式子在 i$\boldsymbol{R}$ 上解析，仅 $s=0$ 一处可能为单极点.

第三个积分与第一个积分相似，我们可得到

$$- \delta(\mu) \frac{T^{-s}}{2s} \int_{K(A_F)} (M(s)\phi')(k)\mathrm{d}k, \quad \mathrm{Re}\, s > 1/2.$$

由于 $M(s)$可解析延拓至全平面，这个式子亦可解析延拓，在 i$\boldsymbol{R}$ 上仅 $s=0$ 一处单极点. 因此

$$\int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)} \Lambda^T E(g,\phi',s,\mu,\mu^{-1})\mathrm{d}g = \delta(\mu) \frac{T^s}{2s} \int_{K(A_F)} \phi'(k)\mathrm{d}k$$

$$- \delta(\mu) \frac{T^{-s}}{2s} \int_{K(A_F)} (M(s,\mu,\mu^{-1})\phi')(k)\mathrm{d}k$$

$$+ \varepsilon(\mu) I(s,\mu,\mu^{-1})\phi'. \tag{2}$$

我们注意到当 $\mu|_{F_A^\times}$平凡但 $\mu|_{A_E^0}$不平凡时，$\varepsilon(\mu)=0$，

$$\int_{K(A_F)} M(0,\mu,\mu^{-1})\phi'(k)\mathrm{d}k = \int_{K(A_F)} \phi'(k)\mathrm{d}k,$$

故此时上式右边在 i$\boldsymbol{R}$ 上解析，无奇点. 而当 $\mu|_{F_A^\times}$与 $\mu|_{A_E^0}$都平凡时，$\mu^2=1$，$M(0,\mu,\mu^{-1})=-\mathrm{id}$，且

$$\lim_{t\to 0} t\varepsilon(\mu) I(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})\phi' = \mathrm{i}\delta(\mu) \int_{K(A_F)} \phi'(k)\mathrm{d}k.$$

故上式右边仍然在 i$\boldsymbol{R}$ 上解析，无奇点. 最后当 $\mu|_{F_A^\times}$非平凡但 $\mu|_{A_E^0}$平凡时，$\delta(\mu)=0$，

$$\lim_{s\to 0} s\varepsilon(\mu) I(s,\mu,\mu^{-1})\phi' = 0,$$

故上式右边在 i$\boldsymbol{R}$ 上解析. 这就证明了整个(2)式在 i$\boldsymbol{R}$ 上解析. Jacquet [78]又证明了

$$\int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)} \Lambda^T E(g,\phi',s,\mu,\nu)\mathrm{d}g$$

对于任意的 ϕ' 在 i$\boldsymbol{R}$ 上为 $t(s=\mathrm{i}t)$的慢增函数，即 $O(t^n)$.

§3　核函数 $K_{\mathrm{cont}}^{f_1'}$ 的积分

利用前节的结果，

$$\int_{E\backslash A_E} \overline{E}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi', s, \mu, \mu^{-1}\right) \psi \circ \mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x$$

在 i$\boldsymbol{R}$ 上解析，亦为 $O(t^n)$，且对于任意 $\alpha,\beta\in I'$，

$$(\Pi(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})(\widetilde{f}')\phi'_\beta,\phi'_\alpha)$$

在 i$\boldsymbol{R}$ 上亦解析，为 t 的 Schwartz 函数，这里 $\{\phi'_\alpha\}_{\alpha\in I'}$ 为 $H(\mu,\mu^{-1})$ 的一组标准正交基，见第四章 § 5. 因此积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\Pi(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})(\widetilde{f}')\phi'_\beta,\phi'_\alpha)\mathrm{d}t$$
$$\times\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\Lambda^T E(g,\phi'_\alpha,\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})\mathrm{d}g$$
$$\times\int_{E\backslash\boldsymbol{A}_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\phi'_\beta,\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x$$

绝对收敛. Jacquet[78]的文章中更证明了当 $f'=f_1*f_2$ 时，其中 f_1 和 f_2 为 $K(\boldsymbol{A}_E)$-有限函数，和式

$$\sum_{\mu\nu=1}\sum_{\alpha,\beta\in I'}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Pi(\mathrm{i}t,\mu,\nu)(\widetilde{f}')\phi'_\beta,\phi'_\alpha|$$
$$\times\left|\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\Lambda^T E(g,\phi'_\alpha,\mathrm{i}t,\mu,\nu)\mathrm{d}g\right|$$
$$\times\left|\int_{E\backslash\boldsymbol{A}_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\phi'_\beta,\mathrm{i}t,\mu,\nu\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}t$$

为有限，且当去掉绝对值符号后这式子等于

$$\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\int_{E\backslash\boldsymbol{A}_E}\Lambda^T K^f_{\mathrm{cont}}\left(g,\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而且此式当 T 充分大时等于

$$\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\int_{E\backslash\boldsymbol{A}_E}K^f_{\mathrm{cont}}\left(g,\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g.$$

由此可见截算子 Λ^T 在 T 充分大时对我们要计算的核函数 K^f_{cont} 的积分并无影响. 之所以我们仍要引进截算子，是因为我们需要用它来具体计算这个积分.

为此我们可在上面对 t 的积分取 $T\to+\infty$ 的极限：

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\Pi(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})(\widetilde{f}')\phi'_\beta,\phi'_\alpha)$$

$$\times\left(\delta(\mu)\frac{T^{it}}{2it}\int_{K(A_F)}\phi'_\alpha(k)\mathrm{d}k-\delta(\mu)\frac{T^{-it}}{2it}\right.$$

$$\left.\times\int_{K(A_F)}(M(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})\phi'_\alpha)(k)\mathrm{d}k+\varepsilon(\mu)I(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})\phi'_\alpha\right)$$

$$\times\int_{E\backslash A_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\phi'_\beta,\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

利用

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t=0,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\frac{\mathrm{d}t}{t}=f(0),$$

及

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\lambda t}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\pm\mathrm{i}f(0),$$

我们可将上面对 t 的积分改写为三个 v. p. 积分的和而分别对每个 v. p. 积分求 $T\to+\infty$时的极限. 因此

$$\lim_{T\to+\infty}\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty}(\Pi(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})(\widetilde{f}')\phi'_\beta,\phi'_\alpha)\left(\delta(\mu)\frac{T^{it}}{2it}\int_{K(A_F)}\phi'_\alpha(k)\mathrm{d}k\right)$$

$$\times\int_{E\backslash A_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\phi'_\beta,\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\delta(\mu)}{2}(\Pi(0,\mu,\mu^{-1})(\widetilde{f}')\phi'_\beta,\phi'_\alpha)$$

$$\times\int_{K(A_F)}\phi'_\alpha(k)\mathrm{d}k\int_{E\backslash A_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\phi'_\beta,0,\mu,\mu^{-1}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x$$

及

$$\lim_{T\to+\infty}\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty}(\Pi(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})(\widetilde{f}')\phi'_\beta,\phi'_\alpha)$$

$$\times\left(-\delta(\mu)\frac{T^{-it}}{2it}\int_{K(A_F)}(M(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})\phi'_\alpha)(k)\mathrm{d}k\right)$$

$$\times\int_{E\backslash A_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\phi'_\beta,\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\delta(\mu)}{2}(\Pi(0,\mu,\mu^{-1})(\widetilde{f}')\phi'_\beta,\phi'_\alpha)\int_{K(\mathbb{A}_F)}(M(0,\mu,\mu^{-1})\phi'_\alpha)(k)\mathrm{d}k$$

$$\times \int_{E\backslash\mathbb{A}_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\phi'_\beta,0,\mu,\mu^{-1}\right)\mathrm{d}x.$$

故当 $\mu|_{\mathbb{A}_F^\times}$平凡但 $\mu|_{\mathbb{A}_E^0}$非平凡时，

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\Pi(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})(\widetilde{f}')\phi'_\beta,\phi'_\alpha)$$

$$\times \int_{Z(\mathbb{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)}\Lambda^T E(g,\phi'_\beta,\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})\mathrm{d}g$$

$$\times \int_{E\backslash\mathbb{A}_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\phi'_\beta,\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$= \delta(\mu)(\Pi(0,\mu,\mu^{-1})(\widetilde{f}')\phi'_\beta,\phi'_\alpha)$$

$$\times \int_{E\backslash\mathbb{A}_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\phi'_\beta,0,\mu,\mu^{-1}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x.$$

而当 $\mu|_{\mathbb{A}_F^\times}$与 $\mu|_{\mathbb{A}_E^0}$都平凡时，$\mu^2=1$，$M(0,\mu,\mu^{-1})=-\mathrm{id}$，上述极限等于

$$\varepsilon(\mu)\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}(\Pi(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})(\widetilde{f}')\phi'_\beta,\phi'_\alpha)I(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})\phi'_\alpha$$

$$\times \int_{E\backslash\mathbb{A}_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\phi'_\beta,\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

最后当 $\mu|_{\mathbb{A}_F^\times}$非平凡但 $\mu|_{\mathbb{A}_E^0}$平凡时，我们得到同样表达式，但积分无 v.p. 字样.

我们指出当 $\mu|_{\mathbb{A}_F^\times}$与 $\mu|_{\mathbb{A}_E^0}$均平凡时，所得的 v.p. 积分实际上为普通绝对收敛积分. 这是因为此时

$$\int_{E\backslash\mathbb{A}_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\phi'_\beta,s,\mu,\mu^{-1}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x$$

在 $s=0$ 处有一单零点，正好与 $I(s,\mu,\mu^{-1})\Phi_\alpha$ 在 $s=0$ 处的单极点抵消. 详见叶扬波的文章[60].

这样我们就得出了最后的结论.

定理 设 $f'=f_1*f_2$ 为两个 $K(A_E)$ 有限函数的卷积，则

$$\int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)}\int_{E\backslash A_E}K_{\text{cont}}^{f_1'}\left(g,\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\right)\psi\circ\mathrm{tr}_{E/F}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g$$

$$=\sum_{\mu|_{A_E^0}=1}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})^{\wedge}(\widetilde{f}'^{T})$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{vol}(A_F^{\times}E^{\times}\backslash A_E^{\times})}{4\pi}\sum_{\alpha,\beta\in\Gamma}\int_{E\backslash E_A}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\phi_\beta',\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1}\right)\right.$$

$$\times\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\ I(\mathrm{i}t,\mu,\mu^{-1})\phi_\alpha'$$

$$\times\int_{K(A_F)}\int_{K(A_F)}\phi_\beta'(k')\overline{\phi}_\alpha'(k)\mathrm{d}k\mathrm{d}k'\int_{E_T^{\times}}\int_{E_T}f_T'\left(k_T^{-1}\begin{pmatrix}a&ay\\0&1\end{pmatrix}k_T'\right)$$

$$\left.\times\mu_T(a)|a|_{E_T}^{u+1/2}\mathrm{d}^{\times}a\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t$$

$$+\sum_{\substack{\mu|_{F_A^{\times}}=1,\\ \mu|_{A_E^0}\neq 1}}\Pi(0,\mu,\mu^{-1})^{\wedge}(\widetilde{f}'^{T})$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{vol}(F^{\times}\backslash A_F^1)}{4\pi}\sum_{\alpha,\beta\in\Gamma}\int_{E\backslash E_A}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\phi_\beta',0,\mu,\mu^{-1}\right)\right.$$

$$\times\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{K(A_F)}\phi_\alpha'(h)\mathrm{d}h$$

$$\times\int_{K(A_F)}\int_{K(A_F)}\phi_\beta'(k')\overline{\phi}_\alpha'(k)\mathrm{d}k\mathrm{d}k'$$

$$\left.\times\int_{E_T^{\times}}\int_{E_T}f_T'\left(k_T^{-1}\begin{pmatrix}a&ay\\0&1\end{pmatrix}k_T'\right)\mu_T(a)|a|_{E_T}^{1/2}\mathrm{d}^{\times}a\mathrm{d}y\right],$$

其中 T 为 E 的不同赋值 w 的一个有限集合，包含所有 Archimedes 赋值，所有 $|2|_w\neq 1$ 的赋值，所有在 E 中分歧的 F 赋值 v 之上的 E 的赋值，及所有使 f_w' 为非球面函数的赋值. 根据前面的证明与讨论，上式右边的积分与和式均绝对收敛.

我们以下记上式右边第一项中的方括号里的式子为 $c_1(f_T',\mathrm{i}t,\mu)$ 而记第二项中方括号里的式子为 $c_2(f_T',0,\mu)$. 上式右

边的绝对收敛性意味着

$$\sum_{\mu|_{A_E^0}=1}\int_{-\infty}^{+\infty}|c_1(f'_T,\mathrm{i}t,\mu)|\mathrm{d}t \text{ 与 } \sum_{\substack{\mu|_{A_F^\times}=1\\ \mu_{A_E^0}\neq 0}}|c_2(f'_T,0,\mu)| \text{ 均收敛.}$$

§4 相对迹公式的比较

由于

$$\int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)}\int_{E\backslash A_E}K_{\mathrm{cont}}^{f'}\left(g,\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi\circ\mathrm{tr}_{E/F}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g$$

收敛，可知

$$\int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)}\int_{E\backslash A_E}K_{\mathrm{cusp}}^{f'}\left(g,\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi\circ\mathrm{tr}_{E/F}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g$$

亦收敛. 因此我们完全证明了本章开始部分列出的相对迹公式. 本节我们计算这个相对迹公式左边的两个积分

$$\int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)}\int_{E\backslash A_E}K_{\mathrm{cusp}}^{f'}\left(g,\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi\circ\mathrm{tr}_{E/F}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}g$$

与

$$\int_{F\backslash A_F}\int_{F\backslash A_F}K_{\mathrm{cusp}}^{f}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\overline{\psi}(x)\psi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由第四章 §5 可知

$$K_{\mathrm{cusp}}^{f}(h,g)=\sum_{\rho}\rho^{\wedge}(\widetilde{f}^{S})\sum_{\alpha\in J}\rho_S(\widetilde{f}_S)\Phi_\alpha(h)\overline{\Phi}_\alpha(g),$$

其中 S 如前为一个 F 上不同赋值的有限集合，包含所有 Archimedes 赋值，所有在 E 中分歧赋值，及所有 $|2|_v\neq 1$ 的赋值 v；对 ρ 的求和取 $G(A_F)$ 的所有具有中心特征 η 的自守不可约尖点表示，要求每一个 ρ 都包含 $K(F^S)=\prod_{v\notin S}K(F_v)$ 的单位表示；函数 $f=\prod_v f_v$, $\widetilde{f}(g)=\int_{Z(A_F)}f(zg)\eta(z)\mathrm{d}^\times z$, $f^S=\prod_{v\notin S}f_v$；对于所有 $v\notin$

$S, f_v \in \mathscr{H}(G(F_v), K(F_v))$，即为左右 $K(F_v)$ 不变的球面函数；$V_S(\rho)$ 为 ρ 的空间中所有在 $K(F^S)$ 作用下不变的向量组成的子空间，$\{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 为 $V_S(\rho)$ 的一组标准正交基，ρ_S 为 $G(F_S)=\prod\limits_{v\in S} G(F_v)$ 在 $V_S(\rho)$ 上的表示，而 $\rho^\wedge$ 为与 ρ 所对应的 $\mathscr{H}(G(F^S), K(F^S))$ 上的特征.

与此类似

$$K^{f'}_{\text{cusp}}(h,g) = \sum_{\sigma'} \sigma'^\wedge(\widetilde{f}'^T) \sum_{\alpha\in J'} \sigma'_T(\widetilde{f}'_T) \Phi'_\alpha(h) \overline{\Phi}'_\alpha(g),$$

其中 T 为在所有 S 中赋值 v 之上的 E 的赋值 w 组成的有限集合；对 σ' 的和取所有 $Z(\boldsymbol{A}_E)\backslash G(\boldsymbol{A}_E)$ 上的自守不可约尖点表示，要求每一个 σ' 都包含 $K(E^T)=\prod\limits_{w\notin T} K(E_w)$ 的单位表示；函数 $f'=\prod\limits_{w} f'_w$，$\widetilde{f}'(g)=\int_{Z(\boldsymbol{A}_E)} f'(zg)\mathrm{d}^\times z$，$f'^T=\prod\limits_{w\notin T} f'_w$；对于所有 $w\notin T$，$f'_w \in \mathscr{H}(G(E_w), K(E_w))$；$V_T(\sigma')$ 为 σ' 的空间中所有在 $K(E)^T$ 作用下不变的向量组成的子空间，$\{\Phi'_\alpha\}_{\alpha\in J'}$ 为 $V_T(\sigma')$ 的一组标准正交基，σ'_T 为 $G(E_T)=\prod\limits_{w\in S} G(E_w)$ 在 $V_T(\sigma')$ 上的表示，而最后 $\sigma'^\wedge$ 为与 σ' 所对应的 $\mathscr{H}(G(E^T), K(E^T))$ 上的特征.

因此

$$\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)} \int_{E\backslash \boldsymbol{A}_E} K^{f'}_{\text{cusp}}\left(g, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \psi \circ \operatorname{tr}(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}g$$

$$= \sum_{\sigma'} \sigma'^\wedge(\widetilde{f}'^T) a(f'_T, \sigma'),$$

$$\int_{F\backslash \boldsymbol{A}_F} \int_{F\backslash \boldsymbol{A}_F} K^{f}_{\text{cusp}}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \overline{\psi}(x)\psi(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$= \sum_{\rho} \rho^\wedge(\widetilde{f}^S) b(f_S, \rho),$$

其中

$$a(f'_T, \sigma') = \int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)} \sigma'_T(\widetilde{f}'_T)$$

$$\times \left(\sum_{\alpha \in J'} \int_{E \backslash \mathbb{A}_E} \overline{\Phi}'_\alpha \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi \circ \mathrm{tr}(x) \mathrm{d}x \Phi'_\alpha \right) (g) \mathrm{d}g$$

及

$$b(f_S, \rho) = \int_{F \backslash \mathbb{A}_F} \rho_S(\widetilde{f}_S)$$

$$\times \left(\sum_{\alpha \in J} \int_{F \backslash \mathbb{A}_F} \overline{\Phi}_\alpha \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi(y) \mathrm{d}y \Phi_\alpha \right) \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{\psi}(x) \mathrm{d}x.$$

相对迹公式于是可以写成

$$\sum_\rho \rho^\wedge (\widetilde{f}^S) b(f_S, \rho) - \sum_{\sigma'} \sigma'^\wedge (\widetilde{f}'^T) a(f'_T, \sigma')$$

$$- \sum_{\substack{\mu|_{\mathbb{A}_F^\times} = 1 \\ \mu|_{\mathbb{A}_E^0} \neq 1}} \Pi(0, \mu, \mu^{-1})^\wedge (\widetilde{f}'^T) c_2(f'_T, 0, \mu)$$

$$= \sum_{\chi|_{\mathbb{A}_E^0} = 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\mathrm{i}t, \chi, \chi^{-1})^\wedge (\widetilde{f}'^T) c_1(f'_T, \mathrm{i}t, \chi) \mathrm{d}t$$

$$- \sum_{\mu\nu = \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\mathrm{i}t, \mu, \nu)^\wedge (\widetilde{f}^S) c(f_S, \mathrm{i}t, \mu) \mathrm{d}t.$$

由于函数 $f^S = \prod_{v \notin S} f_v$ 与 $f'^T = \prod_{w \notin T} f'_w$ 均由局部球面函数组成，其中 $f_v \in \mathscr{H}(G(F_v), K(F_v))$ 而 $f'_w \in \mathscr{H}(G(E_w), K(E_w))$，我们知道它们之间的关系由 Hecke 代数的基变换映射或卷积公式给出. 具体来说，如果 $v \notin S$ 在 E 中不分裂，而 $w \notin T$ 为 E 在 v 之上的赋值，则相对迹公式的基本引理要求 $f_v = b(f'_w)$. 因此 $\mathscr{H}(G(F_v), K(F_v))$ 上的一个特征 ω 实际上等于 $\mathscr{H}(G(E_w), K(E_w))$ 上的一个特征 $\omega'_w = \omega_v \circ b$：

$$\omega_v(f_v) = \omega_v(b(f'_w)) = \omega'_w(f'_w).$$

如果 $v \notin S$ 在 E 中分裂成两个 E 的赋值 $w_1, w_2 \notin T$，则我们的相对迹公式的建立过程要求

$$f_v = f'_{w_1} * f'_{w_2}$$

(此亦为基本引理的一部分). 故对任意一个 $\mathscr{H}(G(F_v),K(F_v))$ 上的特征 ω 有

$$\omega_v(f_v)=\omega_v(f'_{w_1}*f'_{w_2})=\omega'_{w_1}(f'_{w_1})\cdot\omega'_{w_2}(f'_{w_2}).$$

因此对于任意 $G(A_F)$的所有具有中心特征 η 的自守不可约尖点表示 ρ 来说,其在 $\mathscr{H}(G(F^S),K(F^S))$ 上的特征 $\rho^\wedge$ 给出了一个 $\mathscr{H}(G(E^T),K(E^T))$上的特征 ω'_ρ:

$$\rho^\wedge(f^S)=\omega'_\rho(f'^T).$$

同样道理, $\mathscr{H}(G(F^S),K(F^S))$上的特征 $\pi(\mathrm{i}t,\mu,\nu)^\wedge$ 亦给出一个 $\mathscr{H}(G(E^T),K(E^T))$上的特征. 事实上我们可证明

$$\pi(\mathrm{i}t,\mu,\nu)^\wedge(f^S)=\Pi(\mathrm{i}t,\chi,\chi^{-1})^\wedge(f'^T),$$

其中 $\mu\nu=\eta,\chi=\prod\limits_w\chi_w,\chi_w=\mu_v\circ N_{E_w/F_v}$,如果 v 不分裂;而

$$\chi_{w_1}=\mu_v,\quad \chi_{w_2}(a)=\mu_v(a)|a|_v^{-2it},$$

如果 v 在 E 中分裂为 w_1 与 w_2(见参考文献[60]).

因此相对迹公式又可写为

$$\sum_\rho\omega'_\rho(\widetilde{f}'^T)b(f_S,\rho)-\sum_{\sigma'}\sigma'^\wedge(\widetilde{f}'^T)a(f'_T,\sigma')$$

$$-\sum_{\substack{\chi|_{A_F^\times}=1\\ \chi|_{A_E^0}\neq1}}\Pi(0,\chi,\chi^{-1})^\wedge(\widetilde{f}'^T)c_2(f'_T,0,\mu)$$

$$=\sum_{\chi|_{A_E^0}=1}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi(\mathrm{i}t,\chi,\chi^{-1})^\wedge(\widetilde{f}'^T)(c_1(f'_T,\mathrm{i}t,\chi)$$

$$-c(f_S,\mathrm{i}t,\mu))\mathrm{d}t,$$

其中 χ 与 μ 之间的关系由上面给出. 注意这里式子的左端为 $\mathscr{H}(G(E^T),K(E^T))$上特征的一无穷线性组合,而右端为这类特征的线性组合式的积分. 这些线性组合的和式与积分均绝对收敛,而函数 f'^T可以在 $\mathscr{H}(G(E^T),K(E^T))$中任意选取. 注意 f'_T 与 f_S 不能同时任意选取,它们在建立相对迹公式的时候(见第三章§11)已经有了相互关系: 任意给定 f'_T 可以选取一个 f_S 使得相

对迹公式成立，反之任意给定一个 f_S 可以选取一个 f'_T 使得相对迹公式亦成立.

利用上式两端的绝对收敛性及 f'^{Γ} 的任意性，我们可以引用特征线性独立的原理. 在有限和的情况下特征线性独立性是代数中的一个初等定理. 在无限的情况这个特征线性独立性的推广见参考文献[25]中第 221 页. 由于上式左右两端的特征不一样，一是离散谱，一是连续谱，我们因此得出

$$\sum_{\rho}\omega'_{\rho}(\widetilde{f}'^{T})b(f_S,\rho)-\sum_{\sigma'}\sigma'^{\wedge}(\widetilde{f}'^{\Gamma})a(f'_T,\sigma')$$
$$-\sum_{\substack{\chi|_{A_F^{\times}}=1\\ \chi|_{A_E^0}\neq 1}}\Pi(0,\chi,\chi^{-1})^{\wedge}(\widetilde{f}'^{\Gamma})c_2(f'_T,0,\chi)=0$$

及

$$\sum_{\chi|_{A_E^0}=1}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi(\mathrm{i}t,\chi,\chi^{-1})^{\wedge}(\widetilde{f}'^{T})(c_1(f'_T,\mathrm{i}t,\chi)-c(f_S,\mathrm{i}t,\mu))\mathrm{d}t=0.$$

§5 在群表示论上的应用

对§4 最末尾给出的两个式子中第二式可再用特征线性独立性，得到

$$c_1(f'_T,\mathrm{i}t,\chi)=c(f_S,\mathrm{i}t,\mu).$$

这是相对迹公式中 f_S 与 f'_T 的关系导出的一个副产品. 在考虑§4 最末尾给出的两个式子中的第一式的应用之前，我们指出两个群表示的特征相等当且仅当这两个群表示等价(见参考文献[69]). 在和式

$$\sum_{\sigma'}\sigma'^{\wedge}(\widetilde{f}'^{T})a(f'_T,\sigma')$$

中可能出现 σ' 与 σ'^{τ} 相等价的情况，这里 $\sigma'^{\tau}(g)=\sigma'(g^{\tau})$，而 τ 为 Gal (E/F)的一个生成元. 这时 σ' 与 σ'^{τ} 的特征相等

$$\sigma'^{\wedge}(\widetilde{f}'^{\tau})=(\sigma'^{\tau})^{\wedge}(\widetilde{f}'^{T}).$$

我们指出此时

$$a(f'_T,\sigma')=a(f'_T,\sigma'^{\tau}).$$

事实上

$$a(f'_T,\sigma'^{\tau})=\int_{Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)}\sigma'^{\tau}_T(\widetilde{f}'_T)$$

$$\times\left(\sum_{\alpha\in J'}\int_{E\backslash A_E}\overline{\Phi}'_\alpha\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\,\Phi'_\alpha\right)(g)\mathrm{d}g$$

$$=\int_{\substack{g\in Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)\\ h\in Z(A_E)\backslash G(A_E)}}\widetilde{f}'_T(h)\left(\sum_{\alpha\in J'}\int_{E\backslash A_E}\overline{\Phi}'_\alpha\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\psi\circ\mathrm{tr}(x)\Phi'_\alpha\right)$$

$$\times(gh^{\tau})\mathrm{d}g\mathrm{d}h$$

$$=\int_{\substack{g\in Z(A_F)G(F)\backslash G(A_F)\\ h\in Z(A_E)\backslash G(A_E)}}\widetilde{f}'_T(h)\left(\sum_{\alpha\in J'}\int_{E\backslash A_E}\overline{\Phi}'^{\tau}_\alpha\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\,\Phi'^{\tau}_\alpha\right)$$

$$\times(gh)\mathrm{d}g\mathrm{d}h.$$

这里$\{\Phi'^{\tau}_\alpha\}_{\alpha\in J'}$亦是$V_T(\sigma')$的一个标准正交基.由于非零函数

$$\sum_{\alpha\in J'}\int_{E\backslash A_E}\overline{\Phi}'_\alpha\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\,\Phi'_\alpha$$

不依赖于标准正交基$\{\Phi'_\alpha\}_{\alpha\in J'}$的选取,我们得到

$$a(f'_T,\sigma'^{\tau})=a(f'_T,\sigma').$$

我们对上节最后倒数第二式再用特征线性独立性.由于第二个和式与第三个和式中群表示不同,它们的特征$\sigma'^{\wedge}$与$\Pi(0,\chi,\chi^{-1})^{\wedge}$亦不同.故如果我们可取$f'_T$及附属的$f_S$使得$a(f'_T,\sigma')$不等于零,则必须有第一和式中的一项$\omega'_\rho(\widetilde{f}'^{T})b(f_S,\rho)$存在,使得

$$\omega'_\rho(\widetilde{f}'^{T})=\sigma'^{\wedge}(\widetilde{f}'^{T});$$

如果σ'与σ'^{τ}等价,则此式又等于$\sigma'^{\tau\wedge}(\widetilde{f}'^{T})$;如果$\sigma'$与$\sigma'^{\tau}$不等价,则

$$b(f_S,\rho)=a(f'_T,\sigma').$$

而如果 σ' 与 σ'^{τ} 等价，则 $b(f_S,\rho)=a(f'_T,\sigma')+a(f'_T,\sigma'^{T})=2a(f'_T,\sigma')$. 这也就是说

$$\rho^{\wedge}(f^S)=\sigma'^{\wedge}(\widetilde{f}'^{T}) \text{ 或 } \rho^{\wedge}(f^S)=\sigma'^{\wedge}(\widetilde{f}'^{T})+\sigma'^{\tau\wedge}(\widetilde{f}'^{T})$$

对所有满足基变换映射 $f_v=b(f'_w)$ 及卷积关系 $f_v=f'_{w_1}*f'_{w_2}$ 的 f^S 与 f'^{T} 都成立. 根据我们对群表示基变换的定义(见 §4)，这表明在几乎所有赋值上 σ' 都是 ρ 的基变换，这样的 σ' 被称为 ρ 的拟基变换. 根据参考文献[25]中的一个定理，ρ 的拟基变换即为 ρ 的基变换. 这就是以下定理：

定理 1 设 π' 为 $Z(\boldsymbol{A}_E)\backslash \mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A}_E)$ 的一个自守不可约尖点表示. 如果 π' 在 $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A}_F)$ 上特异，即 π' 的空间中存在一个函数 ϕ 使得

$$\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\phi(g)\mathrm{d}g\neq 0,$$

则 π' 为 $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A}_F)$ 的一个自守不可约尖点表示 π 的基变换，这个 π 的中心特征为 $\eta=\eta_{E/F}$.

证明 设 ϕ 为 π' 空间中的一个函数，满足

$$\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)}\phi(g)\mathrm{d}g\neq 0.$$

取如上的有限集合 S 与 T 使得 ϕ 在 $G(E^T)$ 上为 $K(E^T)$ 的特征函数，则 $\phi\in V_T(\pi')$. 由于 π' 为不可约表示，π'_T 在 $V_T(\pi')$ 上的作用可迁. 由于 $V_T(\pi')$ 中的函数 Φ' 不全满足

$$\int_{E\backslash E_A}\overline{\Phi}'\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x=0,$$

函数

$$\sum_{a\in J'}\int_{E\backslash A_E}\overline{\Phi}'_a\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\Phi'_a$$

非零. 故可取 f'_T 使得

$$\pi'_T(f'_T)\left(\sum_{a\in J'}\int_{E\backslash A_E}\overline{\Phi}'_a\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\Phi'_a\right)=\phi.$$

因此我们得到 $a(f'_T,\pi')\neq 0$，故 π' 为某一 π 的基变换，而 π 的中心特征为 $\eta_{E/F}$. 证毕.

另一方面，给定一个 $E^\times\backslash A_E^\times$ 上的特征 χ，$\chi|_{A_F^\times}$ 平凡但 $\chi|_{A_E^0}$ 非平凡，则我们可取 f'_T 使得

$$c_2(f'_T,0,\chi)=\frac{\mathrm{vol}(F^\times\backslash A_F^1)}{4\pi}\sum_{\alpha,\beta\in\Gamma}(\Pi(0,\chi,\chi^{-1})(\widetilde{f}'_T)\Phi'_\beta,\Phi'_\alpha)$$

$$\times\int_{E\backslash A_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\Phi'_\beta,0,\chi,\chi^{-1}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mathrm{vol}(F^\times\backslash A_F^1)}{4\pi}\sum_{\alpha\in\Gamma}\Bigg(\Pi(0,\chi,\chi^{-1})(\widetilde{f}'_T)$$

$$\times\left(\sum_{\beta\in\Gamma}\int_{E\backslash A_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\Phi'_\beta,0,\chi,\chi^{-1}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\Phi'_\beta\right),\Phi'_\alpha\Bigg)$$

非零. 事实上，由于并非所有的 Eisenstein 级数对应于 $\psi\circ\mathrm{tr}$ 的 Fourier 系数都等于零，函数

$$\sum_{\beta\in\Gamma}\int_{E\backslash A_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\Phi'_\beta,0,\chi,\chi^{-1}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\Phi'_\beta$$

非零. 由于 $\Pi(0,\chi,\chi^{-1})_T$ 在 $V_T(\Pi(0,\chi,\chi^{-1}))$ 上的作用可迁，我们可取 f'_T 使

$$\Pi(0,\chi,\chi^{-1})(\widetilde{f}'_T)$$

$$\times\left(\sum_{\beta\in\Gamma}\int_{E\backslash A_E}\overline{E}\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},\Phi'_\beta,0,\chi,\chi^{-1}\right)\psi\circ\mathrm{tr}(x)\mathrm{d}x\Phi'_\beta\right)$$

为任意 $V_T(\Pi(0,\chi,\chi^{-1}))$ 中函数，例如某一个 Φ'_α. 则对于这个 f'_T，$c_2(f'_T,0,\chi)$ 非零.

这个非零的系数出现在

$$\sum_\rho\omega'_\rho(\widetilde{f}'^T)b(f_S,\rho)=\sum_{\sigma'}\sigma'^\wedge(\widetilde{f}'^T)a(f'_T,\sigma')$$

$$+\sum_{\substack{\chi|_{A_F^\times}=1\\ \chi|_{A_E^0}\neq 1}}\Pi(0,\chi,\chi^{-1})^\wedge(\widetilde{f}'^T)c_2(f'_T,0,\chi)$$

之中，用特征线性独立性我们就能推出存在 $G(\boldsymbol{A}_F)$ 的一个自守不可约尖点表示 ρ，其中心特征为 $\eta_{E/F}$，使得

$$\rho^{\wedge}(f^S) = \omega'_\rho(\widetilde{f}'^T) = \Pi(0,\chi,\chi^{-1})^{\wedge}(\widetilde{f}'^T)$$

且

$$b(f_S,\rho) = c_2(f'_T,0,\chi).$$

故 $\Pi(0,\chi,\chi^{-1})$ 为 ρ 的一个拟基变换，从而是 ρ 的基变换. 这就是下面的定理.

定理 2 存在 $G(\boldsymbol{A}_F)$ 上的自守不可约中心特征为 $\eta_{E/F}$ 的尖点表示 π，其到 $G(\boldsymbol{A}_E)$ 上的基变换不是尖点表示.

这样的 π 通常称为 $G(\boldsymbol{A}_F)$ 的一个二面体(dihedral)表示.

我们指出，以上的两个定理均可利用 Saito[27]，Shintani[26]，Langlands[25]关于 GL(2) 上基变换的证明结果直接推出，见参考文献[79]. 我们以上的证明并没有利用他们的主要结果，因此可以看成是二次扩域上 GL(2) 的基变换存在性的一个独立的新证明.

§6 逆 命 题

本节中我们要证明上节第一个定理的逆命题.

定理 设 π' 为 $Z(\boldsymbol{A}_E)\backslash \mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A}_E)$ 的一个自守不可约尖点表示. 如果 π' 为 $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A}_F)$ 的一个自守不可约中心特征为 $\eta_{E/F}$ 的尖点表示 π 的基变换，则 π' 在 $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A}_F)$ 上特异，即 π' 的空间中存在一个函数 ϕ 使得

$$\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)G(F)\backslash G(\boldsymbol{A}_F)} \phi(g)\mathrm{d}g \neq 0.$$

证明 设 π' 为 $Z(\boldsymbol{A}_E)\backslash \mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A}_E)$ 的一个自守不可约尖点表示，并为 $G(\boldsymbol{A}_F)$ 的一个自守不可约中心特征为 $\eta_{E/F}$ 的尖点表示 π 的基变换. 则在相对迹公式中 π,π' 及其特征仅出现两次：

$$\pi^{\wedge}(f^S)b(f_S,\pi) = \pi'^{\wedge}(\widetilde{f}'^T)b(f_S,\pi)$$

及

$$\pi'^{\wedge}(\widetilde{f}'^T)a(f'_T,\pi'),$$

或当 π' 与 π'^{ι} 等价时有三次，加上

$$(\pi'^{\iota})^{\wedge}(\widetilde{f}'^T)a(f'_T,\pi'^{\iota}) = \pi'^{\wedge}(\widetilde{f}'^T)a(f'_T,\pi').$$

(Langlands[25]证明了当 π' 为基变换时有 $\pi'\cong\pi'^{\iota}$，但我们不需要利用这个结果.)如果我们能选取一个 f_S 使得 $b(f_S,\pi)\neq 0$，则利用特征线性独立性我们可得

$$b(f_S,\pi) = a(f'_T,\pi') \text{ 或 } 2a(f'_T,\pi'),$$

故 $a(f'_T,\pi')\neq 0$. 由此可推出 π' 在 $G(\boldsymbol{A}_F)$ 上特异. 下面的计算因此就围绕着如何得到一个非零的

$$b(f_S,\pi) = \int_{F\backslash\boldsymbol{A}_F}\pi_S(\widetilde{f}_S)\left(\sum_{\alpha\in J}\int_{F\backslash\boldsymbol{A}_F}\overline{\Phi}_\alpha\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\psi(y)\mathrm{d}y\Phi_\alpha\right)\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} \times\overline{\psi}(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $f_S=\prod_{v\in S}f_v$ 的每个局部函数的支集都包含于 G_{0v} 之中. 回忆第五章 § 1，G_{0v} 为 $G(F_v)$ 中满足 $\eta_v(\det g)=1$ 的 g 组成的子群.

考虑 π 的一个 Whittaker 模型 $W(\pi,\psi)$，其中对任意 $\Phi\in V_S(\pi)$ 有 $W_\Phi\in W(\pi,\psi)$ 定义如下

$$W_\Phi(g) = \int_{F\backslash\boldsymbol{A}_F}\Phi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)\overline{\psi}(x)\mathrm{d}x.$$

于是

$$b(f_S,\pi) = \pi_S(\widetilde{f}_S)\left(\sum_{\alpha\in J}\overline{W_\alpha(e)}W_\alpha\right)(e),$$

其中 $W_\alpha=W_{\Phi_\alpha}$ 及 $e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. 我们以下就要选择 f 使得

$$\theta(\widetilde{f},\pi) = \pi(\widetilde{f})\left(\sum_{\alpha\in J}\overline{W_\alpha(e)}W_\alpha\right)(e)$$

非零.

首先考虑一个 $A_F \times A_F$ 上的 Schwartz-Bruhat 函数 Ω，定义其 Fourier 变换为

$$\hat{\Omega}(x) = \int_{A_F \times A_F} \Omega(y)\psi(y^t x)\mathrm{d}y,$$

并设 $\hat{\Omega}(0,0) \neq 0$. 对任意 $W(\pi,\psi)$ 中的 Whittaker 函数 W_1 与 W_2，定义

$$\Psi(s,W_1,W_2,\Omega) = \int_{N(A_F)\backslash G(A_F)} W_1(g)\overline{W_2(g)}\Omega((0,1)g) \times |\det g|^s \mathrm{d}g, \quad \mathrm{Re}\, s > 1,$$

并将其解析延拓至全复平面. 根据参考文献[80]，这个函数对某些 W_1 与 W_2 来说在 $s=1$ 有一个单极点. 于是我们可利用这个可能的单极点来定义 Whittaker 模型上的一个内积：

$$(W_1,W_2) = \frac{c}{\hat{\Omega}(0)} \lim_{s \to 1}(s-1)\Psi(s,W_1,W_2,\Omega),$$

其中 c 为一非零常数. 我们可如此选取 c 使得从 $V_0(\pi)$ 到 $W(\pi,\psi)$ 的映射 $\Phi \mapsto W_\Phi$ 保持内积关系：

$$(\Phi_1,\Phi_2) = (W_{\Phi_1},W_{\Phi_2}).$$

于是 $\{W_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 为 $W(\pi,\psi)$ 的一个标准正交基. 由于核函数 K^f_{cusp} 与标准正交基 $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的选取无关，上面定义的 $\theta(\tilde{f},\pi)$ 亦与标准正交基 $\{W_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的选取无关. 定理的证明由以下二引理完成.

引理 1 如果 f 的支集包含于 G_0，则

$$\theta(\tilde{f},\pi\otimes\eta) = \theta(\tilde{f},\pi).$$

证明 Whittaker 模型 $W(\pi\otimes\eta,\psi)$ 由函数 $W(g)\eta(\det g)$ 组成，其中 $W \in W(\pi,\psi)$. 因此对于 $W_1, W_2 \in W(\pi,\psi)$ 有

$$(W_1\otimes\eta,W_2\otimes\eta) = (W_1,W_2),$$

故 $\{W_\alpha\otimes\eta\}_{\alpha\in J}$ 为 $W(\pi\otimes\eta,\psi)$ 的一组标准正交基，且

$$\theta(\tilde{f},\pi\otimes\eta) = \sum_{\alpha\in J}\int_{Z(A_F)\backslash G(A_F)} W_\alpha(g)\tilde{f}(g)\eta(\det g)\mathrm{d}g\,\overline{W_\alpha(e)}.$$

由于 f 在 G_0 之外为零,我们得到

$$\theta(\widetilde{f},\pi\otimes\eta)=\sum_{\alpha\in J}\int_{Z(\boldsymbol{A}_F)\backslash G_0(\boldsymbol{A}_F)}W_\alpha(g)\widetilde{f}(g)\mathrm{d}g\,\overline{W_\alpha(e)}$$

$$=\theta(\widetilde{f},\pi).$$

引理 2 对于任意的一个 $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A}_F)$ 的自守不可约中心特征为 η 的尖点表示 π,存在一个无穷次可微在 $G_0(\boldsymbol{A}_F)$ 上具有紧支集的函数 f,使得 $\theta(\widetilde{f},\pi)\neq 0$.

证明 首先假设 π 与 $\pi\otimes\eta$ 不相等价,则空间 $W(\pi,\psi)$ 在 G_0 的作用下不可约. 记 V 为由 $W(\pi,\psi)$ 中在 $K(\boldsymbol{A}_F)$ 作用下不变的函数所组成的子空间. 我们可取 $W_1\in V$ 使得 $W_1(e)\neq 0$ 且 $(W_1,W_1)=1$. 由 W_1 扩展出一个 V 的标准正交基,再由此扩展出一个 $W(\pi,\psi)$ 的标准正交基. 则存在 $G(\boldsymbol{A}_F)$ 上的一个左右 $K(\boldsymbol{A}_F)$ 不变的无穷次可微具有紧支集的函数 f,其在 $G_0(\boldsymbol{A}_F)$ 之外为零,满足 $\pi(\widetilde{f})W_1=W_1$,且 $\pi(\widetilde{f})W_\alpha=0$ $(\alpha\neq 1)$. 因此

$$\theta(\widetilde{f},\pi)=\pi(\widetilde{f})W_1(e)\overline{W_1(e)}=|W_1(e)|^2\neq 0.$$

接着假设 $\pi\otimes\eta$ 与 π 等价,则

$$W(\pi,\psi)=W_0(\pi,\psi)\oplus W_1(\pi,\psi),$$

其中 $W_0(\pi,\psi)$ 为 $W(\pi,\psi)$ 中支集包含在 $G_0(\boldsymbol{A}_F)$ 中的函数 $W(g)$ 所组成的子空间,而 $W_1(\pi,\psi)$ 为 $W(\pi,\psi)$ 中支集包含在 $\begin{pmatrix}a_0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}G_0(\boldsymbol{A}_F)$ $(a_0\notin N_{E/F}(\boldsymbol{A}_E^\times))$ 之中的函数所组成的子空间. 可以看出子空间 $W_0(\pi,\psi)$ 与 $W_1(\pi,\psi)$ 正交且 $W_0(\pi,\psi)$ 在 $G_0(\boldsymbol{A}_F)$ 的作用下不可约. 取 $W(\pi,\psi)$ 的一个标准正交基 $\{W_\alpha\}$ 使得每一个 W_α 或属于 $W_0(\pi,\psi)$ 或属于 $W_1(\pi,\psi)$,则对任一个无穷次可微在 $G_0(\boldsymbol{A}_F)$ 上具有紧支集的函数 f,成立

$$\theta(\widetilde{f},\pi)=\sum_{W_\alpha\in W_0(\pi,\psi)}\pi(\widetilde{f})W_\alpha(e)\overline{W_\alpha(e)}.$$

根据第一种情况的证明,我们可取 f 使得 $\theta(\widetilde{f},\pi)\neq 0$. 证毕.

附录　p 进数与 p 进数域

§1　p 进 整 数

我们首先来看初等数论中的一个例子，即同余方程

$$x^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7^n).$$

定理 1　设 p 为奇素数，$n \in \mathbf{Z}_{>0}$ 为一正整数，$a \in \mathbf{Z}$ 满足 $(a,p)=1$. 则 $x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\ p^n)$ 有两个解 mod p^n，如果 $x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\ p)$ 有解；而 $x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\ p^n)$ 无解，如果 $x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\ p)$ 无解.

定理第二部分显然. 为证第一部分，我们用上述例题来说明证明思路. 首先 $x \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\ 7)$ 为 $x^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7)$ 的两个解. 取 $x \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 7)$，设 $x \equiv 3 + 7t (\mathrm{mod}\ 7^2)$ 为 $x^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7^2)$ 的一个解，则有关于 t 的同余方程 $9 + 42t + 49t^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7^2)$，即 $9 + 42t \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7^2)$. 进一步化简得 $1 + 6t \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$. 于是 $t \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$，故 $x \equiv 3 + 7 (\mathrm{mod}\ 7^2)$ 为 $x^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7^2)$ 的一个解.

我们可进而设 $x \equiv 3 + 7 + 7^2 t (\mathrm{mod}\ 7^3)$ 为 $x^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7^3)$ 的一个解，则该同余方程变为

$$9 + 7^2 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 t \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7^3),$$

其可化简为 $2 + 6t \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$. 因此 $t \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7)$，且 $x \equiv 3 + 7 + 2 \cdot 7^2 (\mathrm{mod}\ 7^3)$ 为 $x^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7^3)$ 的一个解.

我们也可以由 $x^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7)$ 的另一个解 $x \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 7)$ 出发，通过类似的计算，或利用计算机，可得 $x^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7^{30})$ 的一个解

$$\begin{aligned} x \equiv & 4 + 5 \cdot 7 + 4 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^4 + 4 \cdot 7^5 + 5 \cdot 7^6 + 4 \cdot 7^7 + 2 \cdot 7^8 \\ & + 4 \cdot 7^{11} + 5 \cdot 7^{12} + 5 \cdot 7^{13} + 6 \cdot 7^{14} + 4 \cdot 7^{15} + 5 \cdot 7^{16} \\ & + 5 \cdot 7^{17} + 2 \cdot 7^{18} + 5 \cdot 7^{20} + 3 \cdot 7^{21} + 4 \cdot 7^{22} + 3 \cdot 7^{25} + 7^{26} \\ & + 7^{27} + 3 \cdot 7^{29} (\mathrm{mod}\ 7^{30}). \end{aligned}$$

这个解又见参考文献[93]中第 288 页.

反复应用上述方法,可得到同余方程 $x^2\equiv a \pmod{p^n}$ 的下列形式的解:

$$x \equiv a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} \pmod{p^n}.$$

换句话说,我们可得到一个无穷序列

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0, \\ x_1 &= a_0 + a_1 p, \\ x_2 &= a_0 + a_1 p + a_2 p^2, \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

满足 $x_n^2\equiv a \pmod{p^{n+1}}$, $x_n\equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$. 这里我们不需要要求 $0\leqslant a_i < p$. 另一种方法是形式上写出一个无穷级数

$$s = a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n + \cdots = \sum_{n\geqslant 0} a_n p^n$$

其满足 $s^2\equiv a \pmod{p^n}$,对所有 $n\geqslant 1$ 成立.

x_n 可以看作 s 的部分和. 在我们前述的例子中,系数 $a_0, a_1, \cdots$ 看不出任何规律,在某种意义下,$s=4+5\cdot 7+4\cdot 7^2+\cdots$ 可看作 2 的一个平方根,类似于 $\sqrt{2}=1.41421\cdots$. 另一方面,线性同余方程 $ax\equiv c \pmod{p^n}$ 的解可具有有规律的系数,例如 $3x\equiv 2 \pmod{5^n}$ 的解由形式无穷级数

$$s = 4 + 1\cdot 5 + 3\cdot 5^2 + 1\cdot 5^3 + 3\cdot 5^4 + \cdots$$

给出.

引进 p 进数概念的一个目的,就是要给这类形式无穷级数 s 以一个严格的定义及收敛的意义. 为此,我们可直接考察形式无穷级数 s,或者如参考文献[94],考察 s 的部分和 x_n.

部分和序列 $\{x_n\}$ 与一般分析中的无穷序列不一样,原因是 $\{x_n\}$ 恒满足条件

$$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}. \tag{1}$$

惟一性也不成立，例如

$$3+7+2\cdot 7^2+\cdots=10+0\cdot 7+2\cdot 7^2+\cdots.$$

两个部分和序列$\{x_n\}$与$\{x_n'\}$被称为等价，如果

$$x_n \equiv x_n' \pmod{p^{n+1}} \tag{2}$$

对所有 $n\geqslant 0$ 成立. 可验证这确实是一个等价关系. 部分和序列的等价类叫做 p **进整数**. 所有 p 进整数构成的集合记作 $\boldsymbol{Z}_p$.

$\boldsymbol{Z}_p$ 是一个环. 为此定义加法

$$\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\}.$$

更准确地说，如果 $\alpha,\beta\in\boldsymbol{Z}_p$，取$\{x_n\}$为等价类 α 中一无穷序列，取$\{y_n\}$为等价类 β 中一序列，则$\{x_n+y_n\}$为一序列满足

$$x_n+y_n\equiv x_{n-1}+y_{n-1}\pmod{p^n},\quad n\geqslant 1,$$

因为 $x_n\equiv x_{n-1}$，$y_n\equiv y_{n-1}\pmod{p^n}$对所有 $n\geqslant 1$ 成立. 故由(1)可知$\{x_n+y_n\}$成一序列并决定了一个等价类. 记此等价类为 $\alpha+\beta\in\boldsymbol{Z}_p$，并称其为 α 与 β 的和. 这里我们还要验证：(i) 等价类 $\alpha+\beta$ 与序列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$的选取无关；(ii) 加法是结合的；(iii) $\boldsymbol{Z}_p$ 中存在一等价类 0；(iv) 任给 $\alpha\in\boldsymbol{Z}_p$，存在 $-\alpha\in\boldsymbol{Z}_p$，及(v) 加法是交换的. 具体验证留给读者.

乘法由$\{x_n\}\cdot\{y_n\}=\{x_ny_n\}$定义. 具体地说，给定 $\alpha,\beta\in\boldsymbol{Z}_p$，取$\{x_n\}$与$\{y_n\}$分别为 α 与 β 中的序列，则$\{x_ny_n\}$为一满足

$$x_ny_n\equiv x_{n-1}y_{n-1}\pmod{p^n},\quad n\geqslant 1$$

的序列，故其确定了一个等价类 $\alpha\beta\in\boldsymbol{Z}_p$，我们称这个等价类为 α 与 β 的**乘积**. 在此需要验证：(vi) $\alpha\beta$ 与序列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$的选取无关；(vii) $\alpha\beta$ 为结合的；(viii) $\boldsymbol{Z}_p$ 中存在等价类 1；(ix) $\alpha\beta$ 交换，及(x) 满足分配律 $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$. 证明亦留给读者.

注意此处 $0\in\boldsymbol{Z}_p$ 是一等价类包含序列$\{0\}$，而等价类 $1\in\boldsymbol{Z}_p$ 包含序列$\{1\}$. 由于 $0\not\equiv 1\pmod{p}$，对序列$\{0\}$与$\{1\}$(2)式对 $n=0$ 不成立. 因此 $0\neq 1$. 下面一个结论是 $\boldsymbol{Z}_p$ 没有零因子，其证明分为若干步.

$\mathbf{Z}_p$ 中的一个元素 α 被称作**可逆元素**,如果存在 $\beta\in\mathbf{Z}_p$ 使得 $\alpha\beta=1$. $\alpha\in\mathbf{Z}_p$ 为一个可逆元素当且仅当其作为等价类,包含一个序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0\not\equiv0(\mathrm{mod}\ p)$. 事实上,如果 α 为一可逆元素并成立 $\alpha\beta=1$,且 β 包含序列 $\{y_n\}$,则 $\alpha\beta$ 包含 $\{x_ny_n\}$. 由 $\alpha\beta=1$ 可知 $x_ny_n\equiv1(\mathrm{mod}\ p^{n+1}),n\geqslant0$,即(2)式对 $\{x_ny_n\}$ 与 $\{1\}$ 成立. 故特别有 $x_0y_0\equiv1(\mathrm{mod}\ p)$. 因此 $x_0\not\equiv0(\mathrm{mod}\ p)$. 反之,如果 $x_0\not\equiv0(\mathrm{mod}\ p)$,则由(1)式可知

$$
\begin{aligned}
&x_1\equiv x_0(\mathrm{mod}\ p),\\
&x_2\equiv x_1(\mathrm{mod}\ p^2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_n\equiv x_{n-1}(\mathrm{mod}\ p^n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

故 $x_0\equiv x_1\equiv\cdots\equiv x_n\equiv\cdots(\mathrm{mod}\ p)$. 于是所有 $x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots$ 均非 p 的倍数. 因此我们可找到 y_n 使得 $x_ny_n\equiv1(\mathrm{mod}\ p^{n+1})$ 成立,$n\geqslant0$. 由此可得一序列 $\{y_n\}$. 尚需证明 $\{y_n\}$ 满足(1)式: 由 $x_ny_n\equiv1(\mathrm{mod}\ p^n)$ 与 $x_{n-1}y_{n-1}\equiv1(\mathrm{mod}\ p^n)$ 可知 $x_ny_n\equiv x_{n-1}y_{n-1}(\mathrm{mod}\ p^n)$. 而由 $x_n\not\equiv0(\mathrm{mod}\ p)$ 与 $x_n\equiv x_{n-1}(\mathrm{mod}\ p^n)$ 推知 $y_n\equiv y_{n-1}(\mathrm{mod}\ p^n)$,$n\geqslant1$. 因此 $\{y_n\}$ 代表了一个等价类 $\beta\in\mathbf{Z}_p$. 这就证明了 $\alpha\beta=1$.

我们以下将 $\mathbf{Z}_p$ 中可逆元素组成的集合记作 $\mathbf{Z}_p^\times$.

定理 2 任意非零元素 $\alpha\in\mathbf{Z}_p$ 均可惟一地表示成 $\alpha=p^m\varepsilon$,其中 $m\geqslant0,\varepsilon\in\mathbf{Z}_p^\times$.

证明 如果 α 为一可逆元素,则可取 $m=0$. 今设 $\alpha\neq0$ 非可逆元素. 作为等价类,α 包含一序列 $\{x_n\}$,且 $p\mid x_0$. 由于 $\alpha\neq0$,同余式 $x_n\equiv0(\mathrm{mod}\ p^{n+1})$ 不可能对所有 $n\geqslant0$ 成立. 设 m 为最小整数满足 $x_m\not\equiv0(\mathrm{mod}\ p^{m+1})$. 由 $p\mid x_0$ 可知 $m\geqslant1$,则 $x_{m-1}\equiv0(\mathrm{mod}\ p^m)$. 由

$$
\begin{aligned}
&x_m\equiv x_{m-1}(\mathrm{mod}\ p^m),\\
&x_{m+1}\equiv x_m(\mathrm{mod}\ p^{m+1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

可知 $x_{m-1}\equiv x_m\equiv x_{m+1}\equiv\cdots\equiv 0\pmod{p^m}$. 定义 $y_n=x_{m+n}/p^m\in\mathbf{Z}$，$n\geqslant 0$，且构造序列 $\{y_n\}$. 从 $x_{m+n}\equiv x_{m+n-1}\pmod{p^{m+n}}$ 得出

$$y_n=\frac{x_{m+n}}{p^m}\equiv\frac{x_{m+n-1}}{p^m}=y_{n-1}\pmod{p^n},\quad n\geqslant 1.$$

故 $\{y_n\}$ 表示了一个 p 进整数 $\varepsilon\in\mathbf{Z}_p$. 由 $x_m\equiv 0\pmod{p^m}$ 但 $x_m\not\equiv 0\pmod{p^{m+1}}$ 可知 $y_0\not\equiv 0\pmod p$，故 $\varepsilon\in\mathbf{Z}_p^\times$. 又由 $p^m y_n=x_{m+n}\equiv x_n\pmod{p^{n+1}}$，我们最后证明了 $p^m\varepsilon=\alpha$.

惟一性 设 $\alpha=p^m\varepsilon=p^k\eta$，其中 $k\geqslant 0$，$\eta\in\mathbf{Z}_p^\times$ 包含 $\{z_n\}$，则 $\varepsilon,\eta\in\mathbf{Z}_p^\times$ 推出 $p\nmid y_m$ 及 $p\nmid z_n$. 由 $p^m\varepsilon=p^k\eta$ 可知 $p^m y_n\equiv p^k z_n\pmod{p^{n+1}}$，$n\geqslant 0$. 取 $n=m$ 得 $p^m y_m\equiv p^k z_m\pmod{p^{m+1}}$，故 $p^{m+1}\nmid p^k$，因此 $k\leqslant m$. 又取 $n=k$ 可得 $p^m y_k\equiv p^k z_k\pmod{p^{k+1}}$，故 $p^{k+1}\nmid p^m$，因此 $m\leqslant k$. 这样我们得到 $m=k$. 从 $p^m\varepsilon=p^m\eta$ 我们推出 $p^m y_n\equiv p^m z_n\pmod{p^{n+1}}$，$n\geqslant 0$. 由此有 $p^m y_{m+n}\equiv p^m z_{m+n}\pmod{p^{m+n+1}}$，$n\geqslant 0$，于是又有 $y_{m+n}\equiv z_{m+n}\pmod{p^{n+1}}$，$n\geqslant 0$. 由于

$$\begin{aligned}
&y_{n+1}\equiv y_n\pmod{p^{n+1}},\\
&y_{n+2}\equiv y_{n+1}\pmod{p^{n+2}}\Rightarrow y_{n+2}\equiv y_{n+1}\pmod{p^{n+1}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_{n+m}\equiv y_{n+m-1}\pmod{p^{n+m}}\Rightarrow y_{n+m}\equiv y_{n+m-1}\pmod{p^{n+1}},
\end{aligned}$$

我们得出 $y_n\equiv y_{n+m}\equiv z_{n+m}\equiv z_n\pmod{p^{n+1}}$. 最后有 $\varepsilon=\eta$. 证毕.

系理 $\mathbf{Z}_p$ 没有零因子.

证明 如果 $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$ 为 p 进整数，则 α,β 可写成 $\alpha=p^m\varepsilon$，$\beta=p^k\eta$，其中 $m\geqslant 0,k\geqslant 0,\varepsilon,\eta\in\mathbf{Z}_p^\times$. 设 $\alpha\beta=0$. 则 $p^{m+k}\varepsilon\eta=0$. 等式两端乘以 $\varepsilon^{-1}\eta^{-1}$，则得到 $p^{m+k}=0$. 但这是不可能的，因为 $p^{m+k}\not\equiv 0\pmod{p^n}$，如果 $n>m+k$. 证毕.

注意，定理 2 的惟一性证明中，等式 $p^m\varepsilon=p^m\eta$ 不能简单地消去 p^m 而得 $\varepsilon=\eta$，因为这里的 p^m 为一个包含序列 $\{p^m,p^m,\cdots\}$ 的等价类. 同样道理，在系理的证明中，$p^{m+k}\varepsilon\eta=0$ 也不能消去 p^{m+k}. 但由于 ε,η 为可逆元素，ε^{-1} 与 η^{-1} 均在 $\mathbf{Z}_p^\times$ 中，故可乘上 $\varepsilon^{-1}\eta^{-1}$.

根据系理，可知 Z_p 为一整环.

下面在 Z_p 上定义赋值. 如果 $\alpha=p^m\varepsilon\in Z_p$ 为一非零 p 进整数，其中 $m\geqslant 0,\varepsilon\in Z_p^\times$，则 m 被称作 α 的 **p 进值**，记作 $m=\nu_p(\alpha)$. 又定义 α 的 p 进赋值为

$$|\alpha|_p = p^{-\nu_p(\alpha)},$$

如果 $\alpha\neq 0$. 又定义 $|0|_p=0$. 由此定义，可知

$$\nu_p(\alpha\beta) = \nu_p(\alpha) + \nu_p(\beta), \quad \alpha,\beta \in Z_p \text{ 非零},$$

及

$$|\alpha\beta|_p = |\alpha|_p \cdot |\beta|_p, \quad \alpha,\beta \in Z_p. \tag{3}$$

如果 $\alpha=p^m\varepsilon,\beta=p^k\eta$，其中 $m\leqslant k,\varepsilon,\eta\in Z_p^\times$，则

$$\alpha + \beta = p^m\varepsilon + p^k\eta = p^m(\varepsilon + p^{k-m}\eta),$$

其中 $\varepsilon+p^{k-m}\eta\in Z_p$. 因此 $\nu_p(\alpha+\beta)\geqslant\nu_p(\alpha)$. 同样可证当 $m>k$ 时，$\nu_p(\alpha+\beta)\geqslant\nu_p(\beta)$. 故成立

$$\nu_p(\alpha + \beta) \geqslant \min(\nu_p(\alpha),\nu_p(\beta))$$

及

$$|\alpha + \beta|_p \leqslant \max(|\alpha_p|, |\beta|_p). \tag{4}$$

由于当 $k>m$ 时 $\varepsilon+p^{k-m}\eta\in Z_p^\times$，我们可进一步得到当 $\nu_p(\alpha)\neq\nu_p(\beta)$ 即 $|\alpha|_p\neq|\beta|_p$ 时，

$$\nu_p(\alpha + \beta) = \min(\nu_p(\alpha),\nu_p(\beta))$$

及

$$|\alpha + \beta|_p = \max(|\alpha|_p, |\beta|_p). \tag{5}$$

这几个式子与 R 上及 C 上的绝对值的性质完全不同. 由(4)式可知

$$|n\alpha|_p \leqslant |\alpha|_p, \quad n \in Z_{>0}.$$

故 p 进赋值为非 Archimedes 赋值，与 R 上及 C 上绝对值的性质

$$|n\alpha| = n|\alpha|, \quad n \in Z_{>0}$$

不同.

对于任意的 $m\in Z_{\geqslant 0}$，p^mZ_p 为整环 Z_p 中的一个理想，这由(3)

式与(4)式可推出. 更进一步, $p\boldsymbol{Z}_p$ 为 $\boldsymbol{Z}_p$ 中的极大理想. 事实上,由定理 2 可得 $p\boldsymbol{Z}_p \cup \boldsymbol{Z}_p^\times = \boldsymbol{Z}_p$, $p\boldsymbol{Z}_p \cap \boldsymbol{Z}_p^\times = \varnothing$. 因此 $p\boldsymbol{Z}_p \neq \boldsymbol{Z}_p$. 又,如果存在一个理想 J 使得 $J \supsetneqq p\boldsymbol{Z}_p$, 可取 $\beta \in J - p\boldsymbol{Z}_p$. 故 $\beta \in \boldsymbol{Z}_p^\times$ 为可逆元素,则 $1 \in J$, 进而 $J = \boldsymbol{Z}_p$.

利用这个极大理想, $\boldsymbol{Z}_p / p\boldsymbol{Z}_p$ 为一个域,称作 $\boldsymbol{Z}_p$ 的**剩余域**. 构造一个映射 $\boldsymbol{Z}_p \to \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 使任意一个 $\alpha \in \boldsymbol{Z}_p$ 如包含序列 $\{x_n\}$, 则其像为 $x_0 \bmod p$. 由(2)式可知此映射不依赖于序列 $\{x_n\}$ 的选取,又由 $\boldsymbol{Z}_p$ 上加法与乘法的定义可知此映射是一个环的同态,且其核为 $p\boldsymbol{Z}_p$. 因此,域 $\boldsymbol{Z}_p/p\boldsymbol{Z}_p$ 与有限域 $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 同构,包含 p 个元素,特征为 p.

§2 p 进 数 域

由于 $\boldsymbol{Z}_p$ 是整环,它可构造一个商域

$$\boldsymbol{Q}_p = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \boldsymbol{Z}_p, \beta \neq 0 \right\},$$

其中加法与乘法为通常的加法乘法,且 $0 = \frac{0}{1}$, $1 = \frac{1}{1}$. 利用 §1 的定理 2,可知对于任意 $\boldsymbol{Q}_p$ 中的元素 $\frac{\alpha}{\beta}$, 存在 $m \in \boldsymbol{Z}$ 与 $\varepsilon \in \boldsymbol{Z}_p^\times$ 使得 $\frac{\alpha}{\beta} = p^m \varepsilon$. 记

$$\nu_p(p^m \varepsilon) = m \quad 及 \quad |p^m \varepsilon|_p = p^{-m}.$$

又设 $|0|_p = 0$. 则我们得到 $\boldsymbol{Q}_p$ 上的 p 进值与 p 进赋值,它们满足(3)式与(4)式. 当 $|\alpha|_p \neq |\beta|_p$ 时,又成立(5)式. 显然又成立 $|\alpha|_p \geqslant 0$, 及 $|\alpha|_p = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$. 因此 $|\cdot|_p$ 为 $\boldsymbol{Q}_p$ 上的一个度量.

这个度量定义了 $\boldsymbol{Q}_p$ 上的一个拓扑. 由于 $\boldsymbol{Q}_p$ 在映射 $\alpha \mapsto |\alpha|_p$ 下的像由 0 与 p 的幂组成,对任意 $\alpha \in \boldsymbol{Q}_p$, $m \in \boldsymbol{Z}$, 集合 $\alpha + p^m\boldsymbol{Z}_p$ 为 $\boldsymbol{Q}_p$ 中的一个开集,亦为 α 的一个开邻域. $\boldsymbol{Q}_p$ 又是一个 Hausdorff 空间,这是因为如果 $\alpha \neq \beta$, 则可取 $m > \nu_p(\alpha - \beta)$, 则 $\alpha + p^m\boldsymbol{Z}_p$ 为 α

的一个开邻域，而 $\beta+p^m\mathbf{Z}_p$ 为 β 的一个开邻域，且 $(\alpha+p^m\mathbf{Z}_p)\cap(\beta+p^m\mathbf{Z}_p)=\varnothing$.

形式为 $\alpha+p^m\mathbf{Z}_p$ 的开邻域组成 α 的一个邻域系，因此 $\boldsymbol{Q}_p$ 满足第一可数性公理. 这里一个开集序列 $\{G_m\}$ 为 α 的邻域系，如果

(1) $\alpha\in G_m$ 对所有 m 成立；

(2) $G_{m+1}\subset G_m$；

(3) 对任意包含 α 的开集 G，存在某个 G_m 使得 $G_m\subset G$.

为了证明我们此处的 $\alpha+p^m\mathbf{Z}_p$ 满足条件(3)，取任意包含 α 的开集 G，则存在 $\delta>0$ 使得

$$\{x\in \boldsymbol{Q}_p \mid |x-\alpha|_p<\delta\}\subset G.$$

取 $m\in\mathbf{Z}$ 使得 $p^{-m}<\delta$，则有 $\alpha+p^m\mathbf{Z}_p\subset G$.

开集 $\alpha+p^m\mathbf{Z}_p$ 同时也是闭集，因为

$$\alpha+p^m\mathbf{Z}_p=\boldsymbol{Q}_p-\bigcup_{\beta\notin\alpha+p^m\mathbf{Z}_p}(\beta+p^m\mathbf{Z}_p).$$

这里对于 $\beta\notin\alpha+p^m\mathbf{Z}_p$ 我们恒有 $(\alpha+p^m\mathbf{Z}_p)\cap(\beta+p^m\mathbf{Z}_p)=\varnothing$.（否则可取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathbf{Z}_p$ 使得 $\beta+p^m\varepsilon_1=\alpha+p^m\varepsilon_2$. 由此及 $\varepsilon_1-\varepsilon_2\in\mathbf{Z}_p$ 可推出 $\beta=\alpha+p^m(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\in\alpha+p^m\mathbf{Z}_p$.）

$\boldsymbol{Q}_p$ 作为一个度量空间是完备的. 这里 $\boldsymbol{Q}_p$ 中的一个序列 $\{\alpha_n\}$ 被称作 **Cauchy 序列**，如果当 n,m 趋向无穷大时 $|\alpha_n-\alpha_m|_p\to 0$. 一个度量空间是完备的，如果其中每一个 Cauchy 序列均收敛. 而一个序列收敛于 α 如果 $|\alpha_n-\alpha|_p\to 0$（当 $n\to\infty$）.

定理 1 $\boldsymbol{Q}_p$ 是完备的.

证明 设 $\{\alpha_n\}$ 为一 Cauchy 序列，则 $\{\alpha_n\}$ 有界. 这是因为可取 n_0 使得对所有 $m\geqslant n_0$ 成立 $|\alpha_m-\alpha_{n_0}|<1$. 将 $\{\alpha_n\}$ 每项乘以同一个 p^m，我们可进而假设 $\alpha_n\in\mathbf{Z}_p$ 对所有 n 成立. 由于 $\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$ 是个有限集合，存在 $x_0\in\mathbf{Z}$ 使得存在无穷多个 $\alpha_n\equiv x_0(\mathrm{mod}\ p)$. 记这些 α_n 为 $\alpha_n^{(1)}$. 由于 $\mathbf{Z}_p/p^2\mathbf{Z}_p$ 亦为有限，存在 $x_1\in\mathbf{Z}$ 使得 $\alpha_n^{(1)}\equiv x_1(\mathrm{mod}\ p^2)$ 对无穷多个 $\alpha_n^{(1)}$ 成立，记这些 $\alpha_n^{(1)}$ 为 $\alpha_n^{(2)}$. 显然 $x_1\equiv x_0(\mathrm{mod}\ p)$. 利用归纳法，我们可得一个整数的无穷序列 $\{x_k\}$ 满足

$$x_k \equiv x_{k-1} (\bmod p^k), \quad k \geqslant 1,$$

且存在无穷多个 $\alpha_n^{(k)} \equiv x_k (\bmod p^{k-1})$. 这个序列$\{x_k\}$表示了一个 p 进整数 α,而子序列$\{\alpha_k^{(k)}\}$收敛于 p 进数 α. 由于序列$\{\alpha_n\}$为 Cauchy 序列,α_n 亦收敛于 α. 证毕.

利用同一个证明可看出 $\mathbf{Z}_p$, $p^m\mathbf{Z}_p$, 及 $\alpha + p^m\mathbf{Z}_p$ 均为列紧的.(一个 Hausdorff 拓扑空间 X 为列紧,如果 X 中每一个序列均有一个子序列收敛于 X 中一元素.)拓扑学中一定理称在度量空间中,列紧推出紧致.(X 的一个子集 A 为紧致,如果 A 的任何一个开覆盖包含一个有限子覆盖.)

我们亦可直接证明 $\mathbf{Z}_p$, $p^m\mathbf{Z}_p$, 及 $\alpha + p^m\mathbf{Z}_p$ 为紧致. 由于 $\mathbf{Z}_p/p^m\mathbf{Z}_p$ 为有限,其射影极限

$$A = \varprojlim_m \mathbf{Z}_p/p^m\mathbf{Z}_p$$

为紧致.(此处对任何 $i \leqslant j$ 可定义同态 f_{ji}: $\mathbf{Z}_p/p^j\mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p/p^i\mathbf{Z}_p$ 满足:

(i) f_{ii}: $\mathbf{Z}_p/p^i\mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p/p^i\mathbf{Z}_p$ 为恒等映射;

(ii) 对于 $i \leqslant j \leqslant k$, 成立 $f_{ji} \circ f_{kj} = f_{ki}$: $\mathbf{Z}_p/p^k\mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p/p^i\mathbf{Z}_p$, 则 $\mathbf{Z}_p/p^i\mathbf{Z}_p$ 的射影极限为一个群 A 及同态 σ_i: $A \to \mathbf{Z}_p/p^i\mathbf{Z}_p$, $i \geqslant 0$, 使得

1) 对所有 $j \geqslant i$, $f_{ji} \circ \sigma_j = \sigma_i$;

2) 如果有一群 B 及同态 τ_i: $B \to \mathbf{Z}_p/p^i\mathbf{Z}_p$ 满足 $f_{ji} \circ \tau_j = \tau_i$, $j \geqslant i$, 则存在同态 θ: $B \to A$ 使得 $\sigma_i \circ \theta = \tau_i$, $i \geqslant 0$.)

要证明 A 为紧致,我们指出对 $m \geqslant 0$, $\mathbf{Z}_p/p^m\mathbf{Z}_p$ 为紧致 Hausdorff, 故 $\prod_{m \geqslant 0} \mathbf{Z}_p/p^m\mathbf{Z}_p$ 亦为紧致 Hausdorff. A 为 $\prod_{m \geqslant 0} \mathbf{Z}_p/p^m\mathbf{Z}_p$ 的一个闭子群. 事实上,$\mathbf{Z}_p/p^m\mathbf{Z}_p$ 为 Hausdorff, 于是映到 $\mathbf{Z}_p/p^m\mathbf{Z}_p$ 上任意两个连续函数 f 与 g 的差核 $\left\{x \in \prod_{m \geqslant 0} \mathbf{Z}_p/p^m\mathbf{Z}_p \,\middle|\, f(x) = g(x)\right\}$ 是闭的.(设 $f(x) \neq g(x)$. $\mathbf{Z}_p/p^m\mathbf{Z}_p$ 为 Hausdorff 推出存在开集 U 和 V 使得 $U \cap V = \varnothing$, $f(x) \in$

U，$g(x)\in V$. 而 $f^{-1}(U)$，$g^{-1}(V)$在 $\prod_{m\geqslant 0}\mathbf{Z}_p/p^m\mathbf{Z}_p$ 中是开的，且包含 x. 则 $f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$为 x 的一个开邻域，其中 $f(y)\neq g(y)$，因此 $\left\{x\in\prod_{m\geqslant 0}\mathbf{Z}_p/p^m\mathbf{Z}_p \,\middle|\, f(x)=g(x)\right\}$为闭集.）$A$ 于是为一组 $\prod_{m\geqslant 0}\mathbf{Z}_p/p^m\mathbf{Z}_p$ 中的闭集的交，因此 A 是闭的. 由于 $\mathbf{Q}_p$ 是完备的，

$$\varprojlim_m \mathbf{Z}_p/p^m\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}_p,$$

故 $\mathbf{Z}_p$ 紧致.

由上述结果，对于任意 $a\in\mathbf{Q}_p$，$a+p^m\mathbf{Z}_p$ 为 a 的一个紧致开邻域，因此 $\mathbf{Q}_p$ 是一个局部紧的域.

对任意素数 p，$\mathbf{Q}_p\supset\mathbf{Q}$，且 $\mathbf{Q}_p$ 为 $\mathbf{Q}$ 在度量 $|\cdot|_p$ 下的完备化. 另一方面，$\mathbf{R}\supset\mathbf{Q}$，且 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{Q}$ 在通常度量 $|\cdot|$或 $|\cdot|^\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$下的完备化. 这些是 $\mathbf{Q}$ 的仅有的完备化.

定理 2(Ostrowski) $\mathbf{Q}$ 上任意一个度量或由 $|\cdot|^\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ 给出，或由 $|\cdot|_p^\alpha(\alpha>0)$给出，其中 p 为某一个素数.

证明 设 φ 为 $\mathbf{Q}$ 上的任意一个非平凡度量，则存在两种可能性：或存在一正整数 $a>1$ 使得 $\varphi(a)>1$，或 $\varphi(n)\leqslant 1$ 对所有 $n\in\mathbf{Z}_{>0}$成立. 先考虑第一种情况. 由于

$$\varphi(n)=\varphi(1+\cdots+1)\leqslant\varphi(1)+\cdots+\varphi(1)=n,$$

故可设 $\varphi(a)=a^\alpha$，其中 $0<\alpha\leqslant 1$. 对任意 $N\in\mathbf{Z}_{>0}$，将其表示为

$$N=x_0+x_1a+\cdots+x_{k-1}a^{k-1},$$

其中 $0\leqslant x_i<a$，$0\leqslant i<k$，$x_{k-1}\geqslant 1$. 因此 N 满足不等式 $a^{k-1}\leqslant N<a^k$. 由度量的性质得出

$$\begin{aligned}\varphi(N)&\leqslant\varphi(x_0)+\varphi(x_1)\varphi(a)+\cdots+\varphi(x_{k-1})\varphi(a)^{k-1}\\&\leqslant(a-1)(1+a^\alpha+\cdots+a^{\alpha(k-1)})\\&=(a-1)\cdot\frac{a^{k\alpha}-1}{a^\alpha-1}<(a-1)\frac{a^{k\alpha}}{a^\alpha-1}\\&=\frac{(a-1)a^\alpha}{a^\alpha-1}a^{(k-1)\alpha}\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{(a-1)a^{\alpha}}{a^{\alpha}-1}N^{\alpha}=CN^{\alpha},$$

此即 $\varphi(N)<CN^{\alpha}$，其中常数 C 与 N 无关. 将 N 换成 N^{m}，$m\in \mathbf{Z}_{>0}$，则 $\varphi(N)^{m}=\varphi(N^{m})<CN^{m\alpha}$，因此 $\varphi(N)<\sqrt[m]{C}\,N^{\alpha}$. 取 m 趋于无穷大，则得 $\varphi(N)\leqslant N^{\alpha}$. 又设 $N=a^{k}-b$，$0<b\leqslant a^{k}-a^{k-1}$，则有

$$\varphi(N)\geqslant \varphi(a^{k})-\varphi(b)=a^{k\alpha}-\varphi(b).$$

由不等式

$$\varphi(b)\leqslant b^{\alpha}\leqslant (a^{k}-a^{k-1})^{\alpha}$$

可得

$$\varphi(N)\geqslant a^{k\alpha}-(a^{k}-a^{k-1})^{\alpha}=\left(1-\left(1-\frac{1}{a}\right)^{\alpha}\right)a^{k\alpha}$$

$$=C_{1}a^{k\alpha}>C_{1}N^{\alpha},$$

其中常数 C_1 不依赖于 N. 取任意 $m\in \mathbf{Z}_{>0}$，则有

$$\varphi(N)^{m}=\varphi(N^{m})>C_{1}N^{\alpha m},$$

及

$$\varphi(N)>\sqrt[m]{C_{1}}\,N^{\alpha}.$$

取 $m\to\infty$ 推出 $\varphi(N)\geqslant N^{\alpha}$. 与上面结果 $\varphi(N)\leqslant N^{\alpha}$ 相比较，我们推出 $\varphi(N)=N^{\alpha}$ 对任意 $N\in \mathbf{Z}_{>0}$ 成立. 又如 $x=\pm N_1/N_2$ 为任意有理数，$N_1,N_2\in \mathbf{Z}_{>0}$，则

$$\varphi(x)=\varphi\left(\frac{N_1}{N_2}\right)=\frac{\varphi(N_1)}{\varphi(N_2)}=\frac{N_1^{\alpha}}{N_2^{\alpha}}=|x|^{\alpha}.$$

这样就证明了如果存在 $a\in \mathbf{Z}_{>1}$ 使得 $\varphi(a)>1$，则

$$\varphi(x)=|x|^{\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant 1.$$

下面我们假设对所有 $n\in \mathbf{Z}_{>0}$ 成立 $\varphi(n)\leqslant 1$. 如果对所有素数 p 成立 $\varphi(p)=1$，则由度量的性质 $\varphi(nm)=\varphi(n)\varphi(m)$，可知 $\varphi(n)=1$ 对一切 $n\in \mathbf{Z}_{>0}$ 成立，与我们关于 φ 非平凡的假设矛盾. 因此，存在某一素数 p，使得 $\varphi(p)<1$. 又假设对另一个素数 q，$q\neq p$，亦成立 $\varphi(q)<1$，则可取 $k,l\in \mathbf{Z}_{>0}$ 使得 $\varphi(p)^{k}<1/2$，$\varphi(q)^{l}<1/2$. 由于 p^{k}

与 q^l 互素，可找到 $u,v\in\mathbf{Z}$ 使得 $up^k+vq^l=1$，其中 $\varphi(u)\leqslant1,\varphi(v)\leqslant1$. 故

$$1=\varphi(1)=\varphi(up^k+vq^l)\leqslant\varphi(u)\varphi(p)^k+\varphi(v)\varphi(q)^l$$
$$<1/2+1/2=1.$$

这个矛盾证明了只有一个素数 p 满足 $\varphi(p)<1$，记 $\varphi(p)=\rho<1$，而对于其他任何素数 q，恒有 $\varphi(q)=1$. 故对任何 $a\in\mathbf{Z}_{\neq0}$，如果 $(a,p)=1$，则 $\varphi(a)=1$. 设 $x=p^m\cdot(a/b)$ 为任何非零有理数，$m\in\mathbf{Z}$，$a,b\in\mathbf{Z}_{\neq0}$，$(a,p)=(b,p)=1$，则

$$\varphi(x)=\varphi(p^m)\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}=\varphi(p^m)=\rho^m.$$

对这样的一个 ρ，$0<\rho<1$，可取 $\alpha>0$ 使得 $\rho=p^{-\alpha}$，则 $\varphi(x)=|x|_p^\alpha$. 证毕.

对 p 进赋值的另一种解释来源于 Haar 测度. p 进域 $\mathbf{Q}_p$ 作为一个加法群具有在加法下不变的 Haar 测度 μ：

$$\mu(x+X)=\mu(X)$$

对所有 $x\in\mathbf{Q}_p$ 及所有可测集 X 成立. 对任意 $\alpha\in\mathbf{Q}_p^\times$ 映射 $x\mapsto\alpha x$ 为 $\mathbf{Q}_p$ 作为一加法群的一个自同构. 故 $\mu(\alpha X)$ 亦为 $\mathbf{Q}_p$ 上的一个 Haar 测度. 由于 Haar 测度差一个常数系数是惟一的，我们有

$$\mu(\alpha X)=\mathrm{mod}_{\mathbf{Q}_p}(\alpha)\mu(X)$$

对任意可测集 X 成立，其中 $0<\mu(X)<+\infty$. 显然 $\mathrm{mod}_{\mathbf{Q}_p}(\alpha)$ 不依赖于 μ 与 X 的选取.

取 $X=\mathbf{Z}_p$ 及 $\alpha\in p^m\mathbf{Z}_p^\times$，$m\geqslant0$. 由于 $\mathbf{Z}_p$ 为开紧致，$\mathbf{Z}_p$ 可测且 $0<\mu(\mathbf{Z}_p)<+\infty$. 由于加法子群 $\alpha\mathbf{Z}_p$ 在 $\mathbf{Z}_p$ 中的指数为 p^m，我们有 $\mu(\alpha\mathbf{Z}_p)=p^{-m}\mu(\mathbf{Z}_p)$. 因此

$$\mathrm{mod}_{\mathbf{Q}_p}(\alpha)=|\alpha|_p$$

对所有 $\alpha\in p^m\mathbf{Z}_p^\times$，$m\geqslant0$ 成立. 此式对 $\alpha\notin\mathbf{Z}_p$ 亦成立，故

$$\mu(\alpha X)=|\alpha|_p\mu(X)$$

且对任意可积函数 f 成立

$$\int_{Q_p} f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\mathrm{d}\mu(x) = |\alpha|_p \int_{Q_p} f(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad \alpha \neq 0.$$

§3 $\boldsymbol{Q}_p$ 的扩域

任意域 K 上的一个线性空间 V 被称为一个线性拓扑空间，如果 V 同时也是一个拓扑空间并且映射 $V\times V\to V$：$(x,y)\mapsto x+y$ 及 $K\times V\to V$：$(\alpha,x)\mapsto \alpha x$ 均为连续映射. 可见对于一般的一个给定的线性空间 V，可能有多种方法定义其上的拓扑结构，使得 V 成为不同的线性拓扑空间. 我们要指出，在下面的特殊情况下，使得 V 成为线性拓扑空间的拓扑结构是惟一的.

定理 1 设 F 为 $\boldsymbol{Q}_p$ 的一个 n 次扩域，则 F 具有惟一的一个拓扑结构使得 F 为域 $\boldsymbol{Q}_p$ 上的一个线性拓扑空间. 在这个拓扑下，F 为局部紧致.

事实上，$(\boldsymbol{Q}_p)^n$ 在积拓扑下即为如此的一个线性拓扑空间. $(\boldsymbol{Q}_p)^n$ 为局部紧致是因为对于任意点 $(x_1,\cdots,x_n)$，其邻域 $(x_1,\cdots,x_n)+(\boldsymbol{Z}_p)^n$ 为紧致. 设 V 为 $\boldsymbol{Q}_p$ 上的一个 n 维线性空间，设 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 为 V 在 $\boldsymbol{Q}_p$ 上的一组基，则映射

$$f:\ (x_1,\cdots,x_n)\mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

是从 $(\boldsymbol{Q}_p)^n$ 到 V 的一个 $\boldsymbol{Q}_p$ 线性双射. 由线性拓扑空间的定义，可知 f 是连续映射. 定理的证明于是就可由下面的引理给出.

引理 1 f^{-1} 亦为连续. 换句话说，f 为开映射.

证明（Weil[31]，第 6 页） 我们需要证明，对任意 $m>0$，$(p^m\boldsymbol{Z}_p)^n$ 在 f 下的像均包含 V 中 0 的一个邻域. 设 S 为由条件 $\sup\limits_i |x_i|_p=1$ 定义的 $(\boldsymbol{Q}_p)^n$ 的一个子集，则 $0\notin S$，S 是闭集，$S\subset(\boldsymbol{Z}_p)^n$，且 S 紧致. 故 $0\notin f(S)$，且 $f(S)$ 紧致. 因此，存在 0 在 V 中的一个邻域 W，及 0 在 $\boldsymbol{Q}_p$ 中的一个邻域 $p^k\boldsymbol{Z}_p$，$k>0$，使得 $(p^k\boldsymbol{Z}_p)W\subset V-f(S)$，即 $yW\cap f(S)=\varnothing$ 当 $|y|_p\leqslant p^{-k}$ 时成立. 取 $m>0$ 及 $a\in\boldsymbol{Q}_p$

使得 $0<|a|_p\leqslant p^{-m-k}$. 设 $v=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i$ 为 aW 中任意一点，$v\neq 0$，又取 h 使得$\sup_i|x_i|=|x_h|$；则 $x_h\neq 0$. 定义 $x_i'=x_h^{-1}x_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，又设 $v'=\sum_{i=1}^{n}x_i'v_i=x_h^{-1}v$. 由于$(x_1',\cdots,x_n')\in S$，我们得到 $v'\in f(S)$；由于 $v\in aW$，又有 $v'\in yW$，其中 $y=x_h^{-1}a$. 由 W 及 k 的定义，由此可得 $|y|_p>p^{-k}$，故 $|x_h|<p^k|a|_p$，且$\sup_i|x_i|_p=|x_h|_p<p^{-m}$. 因此，$(x_1,\cdots,x_n)\in(p^m\mathbf{Z}_p)^n$，同时 v 被包含于该集合在 f 下的像中. 由此我们证明了 $f((p^m\mathbf{Z}_p)^n)$包含了 aW，而 aW 为 0 在 V 中的一个邻域. 证毕.

定理 1 的证明　根据引理 1，f 为从$(\boldsymbol{Q}_p)^n$ 到 V 的线性拓扑空间同构. 如果 V 具有线性拓扑空间的两个拓扑结构，则每一个拓扑结构都同构于$(\boldsymbol{Q}_p)^n$ 的积拓扑结构. 因此 V 的两个拓扑结构相同. 证毕.

现在我们回来再考虑扩域 F. 设 μ 为 F 上的一个 Haar 测度. 对于任意 $\alpha\in F$ 及任意 F 中的可测集 X，$X\mapsto\mu(\alpha X)$亦为 F 上的一个 Haar 测度. 因此

$$\mu(\alpha X)=\mathrm{mod}_F(\alpha)\mu(X),$$

即这两个 Haar 测度之间差一个常数因子. 显然对于任意 $\alpha,\beta\in F$，有 $\mathrm{mod}_F(\alpha\beta)=\mathrm{mod}_F(\alpha)\mathrm{mod}_F(\beta)$.

引理 2　mod_F 在 F 上连续.

证明(Weil[31]，第 4 页)　设 X 为 0 在 F 中的一个开紧邻域. 对任何 $a\in F$ 及任何 $\varepsilon>0$，存在紧集 aX 的一个开邻域 U 使得 $\mu(U)\leqslant\mu(aX)+\varepsilon$. 设 W 为 a 的一个邻域使得 $WX\subset U$，则对所有 $x\in W$，有 $\mu(xX)\leqslant\mu(aX)+\varepsilon$，故

$$\mathrm{mod}_F(x)\leqslant\mathrm{mod}_F(a)+\mu(X)^{-1}\varepsilon.$$

这个式子证明了 mod_F 为上半连续，特别说来，mod_F 在 0 点连续. 对于 $x\neq 0$，由 $\mathrm{mod}_F(x)=\mathrm{mod}_F(x^{-1})^{-1}$，可知 mod_F 在 $F^\times$ 上亦下半连续，因此在 $F^\times$ 上也连续. 证毕.

记$|\alpha|_F=\mathrm{mod}_F(\alpha)$. 则对任何 F 上的可积函数 f 成立

$$\int_F f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\mathrm{d}\mu(x) = |\alpha|_F\int_F f(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad \alpha\neq 0.$$

由 Fubini 定理，对任何 $a\in \boldsymbol{Q}_p$，有 $|a|_F=|a|_p^n$. 将 F 看作 $\boldsymbol{Q}_p$ 上的向量空间，对于任意的从 F 到其自身的 $\boldsymbol{Q}_p$ 线性变换 A 我们亦可定义 $\mathrm{mod}_F(A)$：

$$\mu(AX) = \mathrm{mod}_F(A)\mu(X)$$

或当 A 为可逆线性变换时

$$\int_F f(A^{-1}(x))\mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{mod}_F(A)\int_F f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

引理 3 我们有

$$\mathrm{mod}_F(A) = \mathrm{mod}_{\boldsymbol{Q}_p}(\det A) = |\det A|_p.$$

证明 如果 A 不可逆，则对任何可测集 X 成立 $\mu(AX)=0$，故 $\mathrm{mod}_F(A)=0$. 假设 A 为可逆. 通过选取 F 的一组基将 F 等同于 $(\boldsymbol{Q}_p)^n$，则 A 可被写成下列三类自同构的乘积：(1) 坐标重排；(2) $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(ax_1,x_2,\cdots,x_n)$，$a\in\boldsymbol{Q}_p^\times$；(3) $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto\left(x_1+\sum_{i=2}^n a_ix_i,x_2,\cdots,x_n\right)$，$a_2,\cdots,a_n\in\boldsymbol{Q}_p$. 对于第一类自同构，$\mathrm{mod}_F$ 为 1 且命题成立. 对于第二类自同构，mod_F 为 a 可由 Fubini 定理推出. 第三类亦由 Fubini 定理推出，mod_F 为 1. 证毕.

引理 4 对于任意 $\varepsilon>0$，$B_\varepsilon=\{x\in F\mid |x|_F\leqslant\varepsilon\}$紧致.

证明(Weil[31]，第 5 页) 由于 mod_F 连续，B_ε 为闭集. 设 V 为 0 在 F 中的一个紧邻域. 取 $r\in p\boldsymbol{Z}_p\subset\boldsymbol{Q}_p\subset F$. 由于序列$\{r^n\}$有极限 0，$r$ 的某一幂次包含于 V. 不失一般性我们可设 $r\in V$. 取 $a\in B_\varepsilon$. 由于 r^na 趋向于 0，存在一最小整数 $\nu\geqslant 0$ 使得 $r^\nu a\in V$. 如果 $a\notin V$，则 $r^{\nu-1}a\notin V$，故 $r^\nu a\in V-(rV)$. 记 $V-(rV)$的闭包为 X，则 X 紧致，且 $0\notin X$. 设 $\mu=\inf\limits_{x\in X}|x|_F$. 我们有 $\mu>0$. 取整数 N 使得 $|r|_F^N\leqslant\mu/\varepsilon$. 如果 $a\in B_\varepsilon$，$a\notin V$，且 ν 如上定义，则

$$|r|_F^N\varepsilon\leqslant\mu\leqslant|r^\nu a|_F=|r|_F^\nu|a|_F\leqslant|r|_F^\nu\varepsilon.$$

故 $\nu\leqslant N$，于是 $B_\varepsilon\subset\bigcup_{i=0}^{N}r^{-i}V$. 这个并集紧致，故 B_ε 亦紧致. 证毕.

对于任意 $\alpha\in F$，映射 $A: x\mapsto\alpha x$ 为 F 在 Q_p 上的线性自同态. 故 $|\alpha|_F=|\det A|_p$，且对于任意 α，$|\alpha|_F$ 均等于 p 的一个幂次. 当 $\alpha\neq0$ 时，由于 $A: x\mapsto\alpha x$ 为自同构，成立 $\det A\neq0$. 故 $|\alpha|_F=0$ 当且仅当 $\alpha=0$. 又设 $B: x\mapsto\beta x$，则

$$\begin{aligned}|\alpha\beta|_F&=|\det(AB)|_p=|\det A\det B|_p\\&=|\det A|_p|\det B|_p=|\alpha|_F|\beta|_F.\end{aligned}$$

下面的定理说明 $|\cdot|_F$ 为超度量的，因此 $|\cdot|_F$ 为 p 进赋值.

定理 2 成立

$$|\alpha+\beta|_F\leqslant\max(|\alpha|_F,|\beta|_F).$$

证明(Weil[31]，第 8，10 页) 首先定义一个常数

$$A=\max_{\substack{x\in F\\|x|_F\leqslant1}}|1+x|_F,$$

则 $A\geqslant1$. 由于满足 $|x|_F\leqslant1$ 的集合紧致并且由于函数 $|1+x|_F$ 为连续，可知 $A<+\infty$. 如果 $|\alpha|_F\geqslant|\beta|_F$，则 $|\beta/\alpha|_F\leqslant1$ 且

$$|\alpha+\beta|_F=|\alpha|_F\left|1+\frac{\beta}{\alpha}\right|_F\leqslant A|\alpha|_F.$$

一般来说，则有

$$|\alpha+\beta|_F\leqslant A\max(|\alpha|_F,|\beta|_F).$$

如果 $a\in Z_p$，或者 $a\in Z$，则 $|a|_F=|a|_p^n\leqslant1$. 取 $m\geqslant1$，$N=2^m$，并设 $x_1,\cdots,x_N$ 为 F 的 N 个元素. 对 m 用归纳法，可得

$$\left|\sum_{i=1}^{N}x_i\right|_F\leqslant A^m\max_{1\leqslant i\leqslant N}|x_i|_F.$$

如果取部分 x_i 为 0，则上式对 $N\leqslant2^m$ 亦成立. 对下式

$$(x+y)^{2^m}=\sum_{i=0}^{2^m}\binom{2^m}{i}x^iy^{2^m-i}$$

应用这个估值，则得到

$$|x+y|_F^{2^m}\leqslant A^{m+1}\max_{0\leqslant i\leqslant2^m}\left|\binom{2^m}{i}\right|_F\cdot|x|_F^i\cdot|y|_F^{2^m-i}.$$

不妨设 $|y|_F \leqslant |x|_F$，则由 $\left|\binom{2^m}{i}\right|_F \leqslant 1$ 得到

$$|x+y|_F^{2^m} \leqslant A^{m+1}|x|_F^{2^m},$$

亦即

$$|x+y|_F \leqslant A^{(m+1)2^{-m}}|x|_F.$$

取 $m \to +\infty$，我们得到当 $|y|_F \leqslant |x|_F$ 时，有 $|x+y|_F \leqslant |x|_F$. 证毕.

习题 利用 $|\alpha|_F = |\det A|_p$，证明

$$|\alpha+\beta|_F \leqslant \max(|\alpha|_F, |\beta|_F),$$

其中 $A: x \mapsto \alpha x$.

§ 4 p 进域的结构

记 $R = R_F = \{x \in F \mid |x|_F \leqslant 1\}$，$R^\times = R_F^\times = \{x \in F \mid |x|_F = 1\}$，及 $P = \{x \in F \mid |x|_F < 1\}$. 由于 $|x+y|_F \leqslant \max(|x|_F, |y|_F)$，可知 R 为一环. $R = B_1$ 亦为紧致. F 的所有在乘法下封闭的紧子集均包含于 R. 因此 R 是 F 中惟一的最大紧子环. R 中的可逆元素组成 $R^\times$，P 为 R 中的一个理想. 由于 $R = R^\times \cup P$，P 是 R 的惟一极大理想. 由上节已知 $|\alpha|_F = |\det A|_p$，其中 $A: x \mapsto \alpha x$，故 $|x|_F$ 为 p 的某一幂次. 取 ϖ 为 P 中一元素使得 $|\varpi|_F = \sup\limits_{x \in P}|x|_F$，则存在 $f \geqslant 1$ 使得 $|\varpi|_F = p^{-f}$. 对任意 $x \in F^\times$，我们下面要证明 $|x|_F = p^{-fm}$，其中 m 为某一整数. 事实上，如果 $|x|_F = p^{-(fm+r)}$，其中 $0 < r < f$，则我们可于 P 中找到元素 y 使得 $|y|_F = p^{-r} > p^{-f} = |\varpi|_F$，与 ϖ 的定义不合. 因此对任意 $x \in F^\times$，$|x|_F$ 为 q 的某一幂次，其中 $q = p^f$. 如果 $|x|_F = q^{-m}$，我们称 x 的阶数为 m，记作 $m = \mathrm{ord}_F(x)$. 如果 $|x|_F = q^{-m}$，则 $|x\varpi^{-m}|_F = 1$，故 $x\varpi^{-m} \in R^\times$. 因此

$$P = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \varpi^m R^\times,$$

故 ϖ 为理想 P 的一个生成元，ϖ 被称作 F 的一个**素元素**. 我们有

$$F^{\times}=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\varpi^{m}R^{\times},\ R=\bigcup_{m\geqslant 0}\varpi^{m}R^{\times},\ P=\bigcup_{m\geqslant 1}\varpi^{m}R^{\times}=\varpi R.$$

由于 P 是极大理想，R/P 为一个域. 设 $x_1+P, x_2+P, \cdots$ 为 R/P 中不同的元素. 作为陪集它们互不相交. 利用 Haar 测度 μ，它们均有同样的体积 $\mu(P)=\mu(\varpi R)=|\varpi|_F\mu(R)$. 由于

$$\mu(R)/\mu(P)=|\varpi|_F^{-1}=q,$$

可知域 R/P 中元素个数为 $q=p^f$. 这个域叫做 F 的**剩余域**，其为特征 p. 我们称 F 为剩余特征 p. 注意 F 是特征 0 的.

上节已知对于 $a\in\boldsymbol{Q}_p$，有 $|a|_F=|a|_p^n$. 故 $\mathbf{Z}_p=\boldsymbol{Q}_p\cap R$，$p\mathbf{Z}_p=\boldsymbol{Q}_p\cap P$. 利用同构 $\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p=\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z}_p\cap P\cong(\mathbf{Z}_p+P)/P\subset R/P$，我们可将 $\boldsymbol{F}_p=\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$ 看作 R/P 的一个子域. R/P 在 $\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$ 上的次数是 f. 由于 $|p|_F=|p|_p^n=p^{-n}$，我们可知 $f|n$. 记 $e=n/f$，则 $|p|_F=p^{-n}=q^{-e}$，即 $\mathrm{ord}_F(p)=e$. 这个 e 叫做 F 在 $\boldsymbol{Q}_p$ 上的**分歧指数**，而 f 叫做 F 在 $\boldsymbol{Q}_p$ 上的**模阶数**. 如果 $e=1$ 且 $f=n$，F 被称为在 $\boldsymbol{Q}_p$ 上是**非分歧的**. 如果 $e=n, f=1$，则 F 被称为在 $\boldsymbol{Q}_p$ 上**完全分歧的**. 一个在 $\boldsymbol{Q}_p$ 上完全分歧的 F 如果又满足 $p\nmid e$，则 F 被称为是**驯顺完全分歧的**；相反如果 $p|e$，则 F 被称为在 $\boldsymbol{Q}_p$ 上是**非驯完全分歧的**.

当 F 在 $\boldsymbol{Q}_p$ 上非分歧时，有 $|p|_F=p^{-n}=p^{-f}=q^{-1}$，因此，$p$ 为 F 的一个素元素，且 $F=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}p^mR$. 当 F 在 $\boldsymbol{Q}_p$ 上不是非分歧时，p 就不再是 F 的素元素了. 事实上，这时 $|p|_F=q^{-e}$，故 $p\in\varpi^eR^{\times}$.

定理 1 $F^{\times}$具有惟一的一个 $q-1$ 阶子群 $M^{\times}$. 这个子群由 F 中 1 的与 p 互素次的所有根组成. 该子群是循环群.

证明见参考文献[31]中第 16～18 页.

利用这个子群 $M^{\times}$，我们有 $R^{\times}=M^{\times}\times(1+P)$. 设 Π 为 ϖ 生成的 $F^{\times}$的离散子群，则 Π 与 $\mathbf{Z}$ 同构：$\varpi^m\mapsto m$，且有直积 $F^{\times}=\Pi\times R^{\times}$.

定理 2 设 $p\nmid n, \nu\geqslant 1$，则映射 $x\mapsto x^n$ 诱导出 $1+\varpi^{\nu}R=1+P^{\nu}$ 到其自身的一个自同构. $(F^{\times})^n$ 是 $F^{\times}$的一个开子群，其在

$F^\times$中的指数为 $n(n,q-1)$.

证明(Weil[31],第 32 页)　对于任意 $a\in\mathbf{Z}$, $x\mapsto x^a$ 为 $1+P$ 上的一个自同态. 由归纳法可证对于任意 $n\geqslant 0$ 成立 $(1+P)^{p^n}\subset 1+P^{n+1}$. 因此,如果 $|a|_p\leqslant p^{-n}$,即如果 $a\equiv 0(\bmod p^n)$,则对于 $x\in 1+P$ 有 $x^a\in 1+P^{n+1}$. 这表明,如果给 $\mathbf{Z}$ 以 p 进拓扑,即给 $\mathbf{Z}$ 以从 $\boldsymbol{Q}_p$ 诱导来的拓扑,则映射 $a\mapsto x^a$ 作为从加法群 $\boldsymbol{Z}$ 到乘法群 $1+P$ 是连续映射. 由于 $1+P$ 紧致,这个映射可以惟一地延拓到加法群 $\mathbf{Z}_p$ 到乘法群 $1+P$ 的一个连续映射 $a\mapsto x^a$. 如果 $x\in 1+P^n$,则对于所有 $a\in\mathbf{Z}$ 有 $x^a\in 1+P^n$,因此对于所有 $a\in\mathbf{Z}_p$,亦有 $x^a\in 1+P^n$. 利用 $y^b(x^a)^{-1}=(yx^{-1})^b x^{b-a}$,于是可以看出从 $\mathbf{Z}_p\times(1+P)$ 到 $1+P$ 的映射 $(a,x)\mapsto x^a$ 是连续的. 这给出了 $1+P$ 的一个 $\mathbf{Z}_p$ 模的结构.

如果 $p\nmid n$,则 n 在 $\mathbf{Z}_p$ 中可逆,于是映射 $x\mapsto x^n$ 在 $1+P^\nu$ 上有逆映射,因此为自同构. 当 $p\nmid n$ 时,因为 $(1+P)^n=1+P$,所以 $(F^\times)^n$ 是 $F^\times$的一个开子群. 利用 $F^\times=\Pi\times M^\times\times(1+P)$,可知 $[F^\times:(F^\times)^n]=n(n,q-1)$. 证毕.

§5 特　　征

对于一个局紧交换(加法)群 G,G 上的一个特征 (即酉特征) 是从 G 到绝对值为 1 的复数的乘法群的一个连续同态. 如果 g^* 是这样的一个特征,它在 $g\in G$ 上的值记作 $\langle g,g^*\rangle_G$. 所有 g^* 组成的集合 G^* 具有加法交换群的结构:

$$\langle g,g_1^*+g_2^*\rangle_G=\langle g,g_1^*\rangle_G\cdot\langle g,g_2^*\rangle_G,$$

其中 G^* 中的 0^* 将所有 $g\in G$ 映射到 1. 利用紧子集上的一致收敛我们定义 G^* 上的一个拓扑结构: 对于 G 的任意一个紧子集 K 及任意一个 $\varepsilon>0$,设

$$U(K,\varepsilon)=\{g^*\in G^*\mid |\langle g,g^*\rangle_G-1|<\varepsilon,\forall\, g\in K\};$$

则这些 $U(K,\varepsilon)$ 组成 G^* 中 0^* 的一个邻域系的基. 在这个拓扑下, G^* 叫做 G 的拓扑对偶. 我们可利用

$$\langle g^{**}, g \rangle_{G^*} = \langle g, g^* \rangle_G$$

将 G 与它的拓扑对偶的拓扑对偶 G^{**} 等同起来.

如果 G 为紧致, 则 G^* 的拓扑为离散拓扑. 如果 G 具有离散拓扑, 则 G^* 为紧致. 为证明这两个论断, 设 S 为 $\mathbf{C}$ 上的单位圆. 如果 G 为离散, 则 G^* 为乘积 S^G 的一个闭子群. 此时 G^* 的拓扑等同于点态收敛拓扑. 因此 G^* 是紧致群 S^G 的拓扑子群, 故 G^* 紧致. 我们转而设 G 为紧致. 由于这时可取 $K=G$, 我们可以考虑 $U(G,\varepsilon)$. 任取一充分小正数 $\varepsilon>0$, 则对任意 $g^* \in G^*$, 映射 $g \mapsto \langle g, g^* \rangle_G$ 的像为 S 的一个子群. 由于满足条件 $|x-1|<\varepsilon, x\in S$ 的 S 的子群只有 $\{1\}$, 我们得出 $U(G,\varepsilon)=\{0^*\}$. 因此 G^* 具有离散拓扑.

设 H 为 G 的一个闭子群, 则在 H 上平凡的 G 上的特征组成 G^* 的一个闭子群, 叫作 H 的对偶, 并记作 H_*. H_* 与 $(G/H)^*$ 同构. 如果 H 同时为开子群, 则 G/H 离散. 因此 $(G/H)^*$ 与 H_* 为紧致, 当且仅当 H 为开闭子群. 将 G 看作 G^* 的对偶, 我们又可证明 H 为紧致当且仅当 H_* 为开闭子群.

以上构造可以应用于一个 p 进域 F 上的任意一个有限维向量空间 V. 设 V^* 为 V 的拓扑对偶, 则 V^* 同时也是 F 上的一个向量空间, 其中对于任意 $v^* \in V^*, a\in F, v^*a$ 为由下式定义的特征: $v \mapsto \langle av, v^* \rangle_V$. V^* 维数有限.

定理 1(Weil[31], 第 6,7 页) 设 V 为 F 上的一个局部紧的拓扑向量空间, 则 V 在 F 上为有限维.

证明 取 $a\in F$ 满足 $0<|a|_F<1$. 由于 $B_\varepsilon=\{x\in F \mid |x|_F\leqslant\varepsilon\}$ 组成 F 中 0 的一个邻域基本组, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=0$. 因此 $0<\mathrm{mod}_V(a)<1$, 其中 $\mathrm{mod}_V(a)$ 以通常的方式由

$$\mu(aX) = \mathrm{mod}_V(a)\mu(X)$$

定义, 这里 μ 为 V 上的任意一个 Haar 测度, X 为 V 中任意一个可

测子集，且 $0<\mu(X)<+\infty$. 设 V' 为 V 的一个有限维数为 d 的子空间，则 V' 在 V 中是闭的. 事实上，记 W 为 V' 在 V 中的闭包，任取 $w\in W$. 由 V' 与 w 生成的向量空间 W' 为有限维，因此 V' 在 W' 中是闭的，于是有 $w\in V'$. 由此可知 $W\subset V'$. V' 作为 V 的一个闭子群，V' 亦为局紧. 由于 V 局紧，商空间 $V''=V/V'$ 为局紧. 根据 Fubini 定理

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}_V(a) &= \mathrm{mod}_{V'}(a)\mathrm{mod}_{V''}(a)\\ &= (\mathrm{mod}_F(a))^d\mathrm{mod}_{V''}(a).\end{aligned}$$

这里，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$，可以看出当 $V''\neq\{0\}$ 时 $\mathrm{mod}_{V''}(a)<1$，而当 $V''=\{0\}$ 时 $\mathrm{mod}_{V''}(a)=1$. 故成立

$$0<\mathrm{mod}_V(a)\leqslant(\mathrm{mod}_F(a))^d.$$

这个不等式给出了 d 的一个上界，因此 V 为有限维. 证毕.

对于上述向量空间 V，我们又可考虑其代数对偶 V'，其定义为 V 上所有 F 线性形式组成的向量空间. 对于 $v\in V$ 及 $v'\in V'$，记线性形式 v' 在向量 v 上的值为 $[v,v']_V$. V' 为 F 上的一个向量空间，其定义由 $[av,v'b]_V=a[v,v']_Vb$ 给出，其中 $v\in V,v'\in V',a,b\in F$.

设 χ 为 F 的加法群的任意一个特征，则对于任意 $v'\in V'$，映射 $v\mapsto\chi([v,v']_V)$ 都是 V 的一个特征，其原因是

$$\begin{aligned}\chi([v_1+v_2,v']_V) &= \chi([v_1,v']_V+[v_2,v']_V)\\ &= \chi([v_1,v']_V)\chi([v_2,v']_V).\end{aligned}$$

因此对于任意 $v'\in V'$，存在拓扑对偶中的一个元素 $v^*\in V^*$ 使得

$$\langle v,v^*\rangle_V=\chi([v,v']_V).$$

这个映射 $v'\mapsto v^*$ 给出了代数对偶与拓扑对偶之间的一个关系.

定理 2 设 V 为 p 进数域 F 上的一个有限维向量空间，设 χ 为 F 的一个非平凡加性特征，则由

$$\langle v,v^*\rangle_V=\chi([v,v']_V)$$

给出的映射 $v'\mapsto v^*$ 为 V' 到 V^* 上 F 向量空间的一个同构.

证明见参考文献[31]中第 40,41 页.

系理 取 F 与 χ 如定理 2,则 F 的每一个加性特征都可以惟一地写成 $t \mapsto \chi(tx)$,其中 x 为 F 中某一元素.

利用 $\langle av,v^*\rangle_V=\langle v,v^*a\rangle_V$,$a\in F$,我们可证明 F 上特征的另一个性质.设 L 为 V 的任意一个闭子群,如上定义 L 的对偶 L_* 为 V^* 的一子群,其元素为满足 $\langle v,v^*\rangle_V=1(\forall\ v\in L)$ 的 v^*.取 $V=F$.如果 L 为一个 R 模,L_* 则亦为一个 R 模.如果 $L=R$,则 L 紧致且开,故 L_* 亦为紧致且开.特别是,L_* 不等于 $\{0^*\}$.因此存在一个非平凡的特征 $\chi\in L_*\subset G^*$ 使得其在 R 上平凡.根据系理,对于任何 $\chi\in G^*$,存在 $\nu\in \boldsymbol{Z}$ 使得该特征在 $P^{-\nu}$ 上平凡.我们称使 χ 在 $P^{-\nu}$ 上平凡的最大的整数 $\nu\in\boldsymbol{Z}$ 为非平凡特征 χ 的**阶**,记作 $\nu=\mathrm{ord}_F(\chi)$.

下面我们转而讨论 F 上的积性特征.一个群 G 的一个拟特征是从 G 到 $\boldsymbol{C}^\times$ 的一个连续同态.G 的一个特征是从 G 到 $S=\{z\in\boldsymbol{C}\mid |z|=1\}$ 的一个连续同态.

紧致群 G 的每一个拟特征 ω 都是一个特征.事实上,$g\mapsto|\omega(g)|$ 为从 G 到 $\boldsymbol{R}_+^\times$ 的一个连续同态.由于 G 紧致,其像亦紧致.由于 $\boldsymbol{R}_+^\times$ 的惟一的紧子群是 $\{1\}$,ω 为特征.

一个 G 的特征 ω 如果对所有 $g\in G$ 成立 $\mathrm{Re}(\omega(g))>0$,则其为平凡特征.事实上,取 $z\in\boldsymbol{C}$,$|z|=1$,$\mathrm{Re}z>0$,$z\neq1$,则

$$z=e^{2\pi it},\quad 0<|t|<1/4.$$

设 n 为满足 $n|t|>\dfrac{1}{4}$ 的最小整数,则

$$(n-1)|t|\leqslant 1/4,$$

故 $1/4<n|t|<1/2$,且 $\mathrm{Re}(z^n)<0$.故集合

$$\{z\in\boldsymbol{C}\mid |z|=1,\mathrm{Re}z>0\}$$

不包含 $\boldsymbol{C}^\times$ 的除 $\{1\}$ 以外的任何其他子群.因此 G 在 ω 下的像必为 $\{1\}$.

对于 p 进数域 F 我们有 $F^\times=\Pi\times R^\times$,其中 Π 为素元素 ϖ 生成的子群.Π 同构于由 q 生成的 $\boldsymbol{R}_+^\times$ 的子群,其同构为 $\varpi^m\mapsto$

$|\varpi^m|_F=q^{-m}$. 由于$\boldsymbol{R}_+^\times$的每个拟特征都可写成$x\mapsto x^s$, $s\in\boldsymbol{C}$, 任何Π上的拟特征都有如下形式：$x\mapsto|x|_F^s$.

由于$R^\times$紧致，$R^\times$的任意拟特征均为特征. 子群$1+P^\nu(\nu\geqslant1)$组成1的一个紧邻域基本组. 由于特征ω为连续，存在整数$\nu\geqslant1$使得ω在$1+P^\nu$上平凡. 设f为使$\omega(x)=1$, $x\in R^\times$, $x\in1+P^f$成立的最小非负整数，则$P^f=\varpi^fR$被称作ω的前导子，而f为ω的前导子指数.

参考文献

[1] H. Maass, *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen*, Math. Ann., 121 (1949), 141～183.

[2] A. Erdélyi et al., *Higher Transcendental Functions*, vol. 2, McGraw-Hill; NewYork 1953. 中译本:A. 爱尔台里主编,高级超越函数,第二册,张致中译,科学技术出版社,上海,1957.

[3] H. Maass, *Lectures on modular functions of one complex variable*, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1964.

[4] P. Cartier, *Some numerical computations relating to automorphic functions*, *Computers in Number Theory* (*Proc. Sci. Res. Council Atlas Sympos. No. 2, Oxford*, 1969), Academic Press, 1971, 37～48.

[5] T. Kubota, *Elementary Theory of Eisenstein Series*, Kodansha Ltd. and John Wiley & Sons, 1973.

[6] D. Bump, *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge Studies in Advanced Math. vol. 55, Cambridge Univ. Press, 1997.

[7] N. V. Kuznetsov, *Petersson's conjecture for cuspforms of weight zero and Linnik's Conjecture. Sums of Kloosterman sums*, Mat. Sb. (N. S.), 111(153) (1980), 334～383, 479. 英译本: Math. USSR Sbornik, vol. 39 (1981), No. 3, 299～342.

[8] L. D. Faddeev, *Expansion in eigenfunctions of the Laplace operator on the fundamental domain of a discrete group on the Lobačevskiĭ plane*, Trudy Moskov. Mat. Obšč., 17(1967), 323～350. 英译本:
Труцы Московского Matematического общества Transactions Moscow Math. Soc., 17(1967), 357～386.

[9] A. B. Venkov, *Spectral theory of automorphic functions*, (俄文), Trudy Mat. Inst. Steklov, 153(1981), 1～170. 英译本:Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, (1982), Issure 4, 1～163.

[10] S. S. Gelbart and H. Jacquet, *A relation between automorphic representations of* GL(2) *and* GL(3), Ann. Ecole Norm. Sup., 11 (1978), 471～542.

[11] P. Deligne, *La conjecture de Weil, I*, Publ. Math. IHES, 43(1974), 273～307.

[12] R. W. Bruggeman, *Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math., 45(1978), 1～18.

[13] M. N. Huxley, *Introduction to Kloostermania*. In: *Elementary and Analytic Theory of Numbers*, Banach Center Publications, vol. 17, PWN: Warsaw, 1985, 217～306.

[14] D. Zagier, *Eisenstein series and the Riemann zeta function*. In: *Automorphic forms, representation theory and arithmetic*, Tata Inst. of Fundamental Research Studies in Math. No. 10, Springer: Berlin, 1981, 275～301.

[15] H. Jacquet and J. A. Shalika, *A non-vanishing theorem for zeta functions of* GL_n, Invent. Math., 38(1976), 1～16.

[16] D. Zagier, *Eisenstein Series and the Selberg trace formula I*. In: *Automorphic forms, representation theory and arithmetic*, Tata Inst. of Fundamental Research Studies in Math. No. 10, Springer: Berlin, 1981, 303～355.

[17] W. Roelcke, *Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene*, I & II, Math. Ann. 167(1966), 292～337, 168(1967), 261～324.

[18] W. Roelcke, *Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art*, Sitzungsberichte Heidelberger Akad. Wiss. Nr. 4 (1955), 109 pp.

[19] D. A. Hejhal, *The Selberg Trace Formula for* PSL(2, $\mathbb{R}$), vol. I 548 1976; vol. 2. Lect. Notes in Math. 1001, Springer: Berlin, 1983.

[20] A. B. Venkov, *Spectral theory of automorphic functions, the Selberg zeta-function, and some problems of analytic number theory and mathematical physics*, (俄文)Uspekhi Mat. Nauk 34: 3 (1979), 69～135. 英译本:Russian Math. Surveys 34: 3 (1979), 79～153.

[21] J.-P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Springer: Berlin, 1970.

[22] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. 20(1956), 47~87.

[23] T. Miyake, *Modular forms*, Springer: Berlin, 1989.

[24] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Iwanami Shoten: Tokyo, Princeton Univ. Press: Princeton 1971.

[25] R. P. Langlands, *Base change for* GL(2), Annals of Mathematics Studies, No. 96, Princeton University Press, Princeton 1980.

[26] T. Shintani, *On liftings of holomorphic cusp forms*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 33 (1979), part 2, 97~110.

[27] H. Saito, *Automorphic forms and algebraic extensions of number fields*, Lectures in Mathematics, Kyoto University, 1975,

[28] P. Gérardin and J. P. Labesse, *The Solution of a base change problem for* GL(2) (*following Langlands, Saito, Shintani*), Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, vol. 33 (1979), part 2, 115~133.

[29] J. Arthur and L. Clozel, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Mathematics Studies, No. 120, Princeton University Press 1989.

[30] J. P. Labesse, *Noninvariant base change identities*, Mémoires de la Société Mathématique de France, no. 61, Société Mathématique de France, 1995.

[31] A. Weil, *Basic number theory*, Die Grundlehren der mathematischer Wissenschaften, no. 144, Springer, 1974.

[32] Humphreys, *Arithmetic Groups*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 789, Springer 1980.

[33] M. Kneser, *Strong approximation*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 9 (1966), 187~196.

[34] A. Borel, *Introduction to automorphic forms*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 9 (1966), 199~210.

[35] S. Gelbart, *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Mathematics Studies, no. 83, Princeton University Press, 1975.

[36] R. Godement, *The decomposition of* $L^2(G/\Gamma)$ *for* $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 9 (1966), 211~224.

[37] S. Gelbart and H. Jacquet, *Forms of* GL(2) *from the analytic point of view*, Proceedings of Symposia in Pure Mathcmetics, vol. 33 (1979), part 1, 213~251.

[38] M. Duflo and J.-P. Labesse, *Sur la formule des trace de Selberg*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4(4) (1971), 193~284.

[39] J. Dixmier and P. Malliavin, *Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment differentiables*, Bull. Sci. Math., 102 (1978), 305~330.

[40] R. P. Langlands, *Eiesenstein Series*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 9 (1966), 235~252.

[41] J. Arthur, *A truncation process for reductive groups*, Bulletin of the American Mathematical Society, 83 (1977), 748~750.

[42] J. Arthur, *A trace formula for reductive groups I Terms associated to classes in* $G(\boldsymbol{Q})$, Duke Mathematical Journal, 45(1978), 911~952.

[43] 黎景辉、蓝以中著,二阶矩阵群的表示与自守形式,北京大学出版社,1990.

[44] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes of Mathematics, vol. 544, Springer 1976.

[45] H. Jacquet and K. F. Lai, *A relative trace formula*, Compositio Mathematica, 54(1985), 243~310.

[46] H. Jacquet and R. P. Langlands, *Automorphic forms on* GL(2), Lecture Notes in Mathematics, vol. 114, Springer 1970.

[47] R. Godement, *Notes on Jacquet-Langlands' theory*, The Institute for Advanced Study 1970.

[48] A. Weil, *Adeles and algebraic groups*, Progress in Mathematics no. 23, Birkhauser 1982.

[49] N. V. Kuznetsov, *The sums of the Kloosterman sums*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol 49 (1989), part 2, 251～266.

[50] H. Iwaniec, *Promenade along modular forms and analytic number theory*. In: *Topics in Analytic Number Theory*, University of Texas Press 1985, 221～303.

[51] J. W. Cogdell and I. Piatetski-Shapiro, *The arithmetic and spectral analysis of Poincaré series*, Academic Press 1990.

[52] Y. Ye, *Local Orbital integrals of a relative trace formula*, Chinese Science Bulletin, 38(1993), 969～971.

[53] G. Shimura, *On modular forms of half-integral weight*, Ann. Math., 97(1973), 440～481.

[54] H. Iwaniec, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight*, Invent. Math., 87(1987). 385～401.

[55] P. Sarnak, *Some applications of modular forms*, Cambridge Tracts in Mathematics, no. 99, Cambridge University Press 1990.

[56] Ju. V. Linnik, *Additive problems and eigenvalues of the modular operators*, Proceedings of International Congress of Mathematicians (Stockholm, 1962), Mittag-Leffler 1963, 270～284.

[57] A. Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proceedings of Symposia in Pure mathematics, no. 8 (1965), 1～15.

[58] Y. Ye, *Kuznetsov formulas for generalized Kloosterman sums*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 27(1997), 1291～1317.

[59] Y. Ye, *Kloosterman integral and base change*. In: *Number Theory and its Applications in China*, Comtemporary Mathematics, vol. 77 (1988), 163～170.

[60] Y. Ye, *Kloosterman integral and base change for* GL(2), Journal für die reine und angewandte Mathematik, 400(1989), 57～121.

[61] H. Jacquet and Y. Ye, *Une remarque sur le changement de base quadvaticque*, C. R. Acad. Sci. Paris, 311 Série I(1990), 671～676.

[62] 华罗庚、万哲先，典型群，上海科学技术出版社，1963.

[63] T. A. Springer, *Some results on algebraic groups with involutions.* In: *Algebraic Groups and Related Topics*, Adv. Study Math., no. 6, Kinokuniya 1985, 323～343.

[64] H. Jacquet and S. Rallis, *Kloosterman integrals for skew symmetric matrices*, Pacific Journal of Mathematics, 154(1992), 265～283.

[65] Y. Ye, *An integral transform and its applications*. Math. Ann, 300 (1994), 405～417.

[66] I. Satake, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 18(1963), 1～69.

[67] F. I. Mautner, *Spherical functions over p-adic fields, I*, Amer. J. Math., 80(1958), 441～457.

[68] Y. Ye, *A remark on the Satake transform and base change map*, Chinese Science Bulletin, 39(1994), 1409～1412.

[69] P. Cartier, *Representations of p-adic groups: A survey*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 33(1979), part 1, 111～155.

[70] G. Stevens, *Poincaré series on* GL(r) *and Kloosterman sums*, Math. Ann., 277(1987), 25～51.

[71] H. Davenport and H. Hasse, *Die Nullstellen der Kongruenzzetafunctionen in gewissen zyklischen Fallen*, J. reine angew. Math., 172 (1935), 151～182.

[72] Y. Ye, *The lifting of an exponential sum to a cyclic algebraic number field of a prime degree*, Transactions of the American Mathematical Society, 350(1998), 5003～5015.

[73] Y. Ye, *The lifting of Kloosterman sums*, Journal of Number Theory, 51(1995), 275～287.

[74] H. Jacquet and Y. Ye, *Distinguished representations and quadratic base change for* GL(3), Transactions of the American Mathematical Society, 348(1996), 913～939.

[75] H. Jacquet and Y. Ye, *Germs of Kloosterman integrals for* GL(3), Transactions of the American Mathematicas Society, 351 (1999), 1227～1255.

[76] J. Arthur, *A trace formula for reductive groups* Ⅱ: *Applications of a truncation operator*, Compositio Mathematica, 40(1980), 87~121.

[77] S. Gelbart, *Lectures on the Arthur-Selberg Trace Formula*, University Lecture Series, vol. 9, American Mathematical Society, 1996.

[78] H. Jacquet, *The continuous spectrum of the relative trace formula for* GL(3) *over a quadratic extension*, Israel Journal of Mathematics, 89(1995), 1~59.

[79] G. Harder, R. P. Langlands and M. Rapoport, *Algebraische Zyklen auf Hillbert-Blumenthal-Flächen*, Journal für die reine und angewandte Mathamatik, 366(1986), 53~120.

[80] H. Jacquet and J. A. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic representations I*, American Journal of Mathematics, 103(1981), 499~558.

[81] A. Weil, *On some exponential sums*, Proc. National Academy of Science USA, 34(1948), 204~207.

[82] H. Jacquet and Y. Ye, *Relative Kloosterman integrals for* GL(3), Bull. Soc. Math. France, 120(1992), 263~295.

[83] Y. Ye, *The fundamental lemma of a relative trace formula for* GL(3), Compositio Math., 89(1993), 121~162.

[84] D. Bump, S. Friedberg and D. Goldfeld, *Poincaré series and Kloosterman sums for* SL(3, **Z**), Acta Arith., 50(1988), 31~89.

[85] W. Luo, Z. Rudnick and P. Sarnak, *On Selberg's eigenvalue conjecture*, Geometric and Functional Analysis, 5(1995), 387~401.

[86] P. Sarnak, *Spectra and eigenfunctions of Laplacians*, CRM Proc. Lecture Notes, 12(1997), 261~276.

[87] D. Goldfeld and P. Sarnak, *Sums of Kloosterman sums*, Invent. Math. 71(1983), 243~250.

[88] A. Borel, *Automorphic forms on* $SL_2(\boldsymbol{R})$, Cambridge Tracts in Math. vol. 130, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1997.

[89] A. Selberg, *Harmonic analysis*, in Collected Papers I, 627~674, Springer, Berlin 1992.

[90] H. Iwaniec, *Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms*, Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 1995.

[91] 潘承洞、潘承彪著,模形式导引,北京大学出版社,2002,3.

[92] W. Luo, Z. Rudnick and P. Sarnak, *On the generalized Ramanujan Conjecture for* GL (n), in: *Automorphic Forms, Automorphic Representations, and Arithmetic* (*Fort Worth, TX*, 1996), 301～310, Proc. Sympos. Pure Math. 66, part 2, American Math. Soc., Providence, 1999.

[93] F. Q. Gouvêa, *p-adic Numbers, An Introduction, 2nd edition*, Springer, Berlin 1997.

[94] Z. I. Borevitch and I. R. Shafarevitch, *Number Theory*, Academic Press, New York 1966.

索　　引

Y

Z